TEODOR
ROȘESCU

NOI APROXIMAȚII ÎN TEORIA TRANSPORTULUI NEUTRONILOR

EDITURA
ACADEMIEI
REPUBLICII
SOCIALISTE
ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial N(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} = -\vec{v}.\mathrm{grad}\, N(\vec{r},\vec{v},t) - \vec{v}\,\Sigma(\vec{r},\vec{v})N(\vec{r},\vec{v},t) +$$
$$+\int \vec{v}'c(\vec{v}')\Sigma(\vec{r},\vec{v}')f(\vec{v}'-\vec{v},\Omega')N(\vec{r},\vec{v}',t)\,dv + S(\vec{r},\vec{v},t)$$

Scanned with OKEN Scanner

12367

TEODOR ROȘESCU

NOI APROXIMAȚII ÎN TEORIA TRANSPORTULUI NEUTRONILOR

ROMANIA FUNDATIA "GH. ZANE" IASI

1968
EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Amploarea preocupărilor privind dezvoltarea ramurilor aplicative ale fizicii nucleare — una din cele mai dinamice ramuri ale științelor moderne — a impus denumirea de eră atomică epocii contemporane. Caracterizată îndeosebi prin proiectarea și construirea unei mari varietăți de reactori nucleari pentru producția energiei electrice, a radioizotopilor sau a elementelor transurane, pentru propulsie sau pentru cercetări neutronice, radiobiologice și de corp solid, această dezvoltare nu ar fi fost posibilă fără un aparat matematic adecvat.

Metodele clasice ale matematicii, cunoscute în epoca descoperirii fisiunii nucleare, nu erau suficiente pentru a răspunde cerințelor impuse de rezolvarea diferitelor ecuații integro-diferențiale ale teoriei transportului neutronilor, care sînt fundamentale în fizica reactorilor. Această insuficiență a fost remediată atît prin dezvoltarea pe care au impus-o metodelor de calcul la mașinile electronice cît și prin apariția unor noi metode matematice analitice și numerice remarcabile.

Interesul teoretic și practic al unei lucrări în care să fie expusă interpretarea fizică a acestor noi dezvoltări este deci dublu, referindu-se atît la teoria reactorilor nucleari, cît și la rezolvarea numeroaselor probleme puse de proiectarea, construirea și utilizarea reactorilor.

O astfel de lucrare apare pentru prima oară în literatura română de specialitate și ea se va înscrie în preocupările de perspectivă privind dezvoltarea energeticii nucleare în țara noastră într-un viitor apropiat.

Sperăm că ea va satisface o necesitate obiectivă impusă de aceste perspective și va pune la îndemîna numeroșilor cercetători interesați, direct sau indirect, în problemele legate de fizica reactorilor nucleari, **o trecere în revistă a progreselor recente din acest domeniu.**

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

Pag.

Introducere 11

Bibliografie 26

CAPITOLUL 1. **Aproximaţii polinomiale** 29

1.1. Aproximaţia P_n (a armonicilor sferice sau a polinoamelor Legendre) 29
1.1.1. Aproximaţia P_n iterat (P_n^*) 31
1.1.2. Aproximaţia B_n 32
1.1.3. Aproximaţia G_n a armonicilor sferice 33
1.1.4. Aproximaţia asimptotică (A_n) 40
1.1.5. Aproximaţia P_∞ (fără trunchiere) 42
1.1.6. Aproximaţia dublu P_n (Yvon) 47
1.1.7. Aproximaţia polinomială a necorelării 53
1.1.8. Aproximaţiile armonicilor sferice pare (P_{2n}). 55
1.2. Aproximaţia polinoamelor Jacobi—Gegenbauer 59
1.3. Aproximaţia polinoamelor Cebîşev 68
1.4. Alte aproximaţii polinomiale 73
Bibliografie 75

CAPITOLUL 2. **Aproximaţiile integrale ale transportului neutronilor** . . . 77

2.1. Metoda ecuaţiei integrale 80
2.1.1. Distribuţia neutronilor în medii cu $\Sigma = 0$, fără dependenţă temporală 80
2.1.2. Distribuţia neutronilor în medii cu $(\Sigma_a \neq 0)$ $\Sigma_s = 0)$. 84
2.1.3. Distribuţia neutronilor în medii multiplicatoare $(\Sigma_a \neq \neq 0, \Sigma_s \neq 0, \Sigma_f \neq 0)$ 87
2.1.4. Distribuţia temporală a neutronilor 92
2.2. Aproximaţia funcţiilor proprii singulare 93
2.3. Metoda probabilităţilor de ciocnire 105
2.3.1. Probabilităţi de primă ciocnire 105
2.3.2. Probabilităţi de ciocnire multiplă 111
2.4. Metodele transformatelor integrale. 112
2.4.1. Distribuţia energetică a neutronilor încetiniţi (în termalizare). 120

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

2.4.2. Încetinirea neutronilor (termalizarea) 126
2.5. Metoda nucleelor integrale 144
2.5.1. Nuclee integrale de difuzie 148
2.5.2. Nuclee integrale de transport 152
2.5.3. Nuclee de încetinire 157
2.5.4. Nuclee de difuzie şi de încetinire 159
2.5.5. Nuclee finite 162
2.5.6. Nuclee integrale şi transformatele Fourier 163
2.5.7. Nuclee sintetice 174
2.5.8. Nuclee integrale în aproximaţiile P_1 şi $P_2^{\pm}$ 182
2.5.9. Nuclee integrale în cinetica reactorilor 185
Bibliografie 192

CAPITOLUL 3. **Aproximaţia înglobării invariante** 195

3.1. Recensământul neutronilor 199
Bibliografie 203

CAPITOLUL 4. **Metodele calculului variaţional şi ale teoriei perturbaţiei** . . 205

4.1. Formulări variaţionale ale teoriei transportului 207
4.2. Teoria perturbaţiei în transportul neutronilor 223
Bibliografie 227

CAPITOLUL 5. **Aproximaţia termodinamică a transportului neutronilor** . 229

5.1. Echivalenţa teoriei transportului şi a teoriei termodinamice a proceselor ireversibile 231
5.2. Teoria transportului şi principiul persistenţei maxime 239
5.3. Distribuţia spaţio-energetică a neutronilor 246
5.3.1. Mediu cu temperatură constantă 246
5.3.2. Temperatura „gazului" de neutroni 250
5.3.3. Mediu cu gradient de temperatură 251
Bibliografie 258

CAPITOLUL 6. **Aproximaţia cuanto-mecanică** 259

Bibliografie 262

CAPITOLUL 7. **Aproximaţia abstractă a transportului neutronilor** 263

7.1. Metoda Kato—Reed 266
7.1.1. Deformarea liniară a mediului 268
7.1.2. Deformarea arbitrară a mediului 269
7.2. Metoda Habetler—Martino 271
Bibliografie 275

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

CAPITOLUL 8. **Aproximaţii stohastice ale transportului neutronilor** . . . 277

8.1. Aproximaţia mersului la întîmplare (a „împrăştierii multiple") 279
8.2. Metoda funcţiei generatoare a distribuţiei de probabilitate. . 290
Bibliografie 292

CAPITOLUL 9. **Aproximaţii numerice** 293

9.1. Aproximaţia ordonatelor discrete (Wick—Chandrasekhar) . . 293
9.2. Aproximaţiile S_N (segmentarea unghiulară) 295
9.2.1. Aproximaţia S_N — difuzie 295
9.2.2. Aproximaţia S_N — analitic 298
9.2.3. Aproximaţia $S_{N/2}$. 299
9.3. Metoda sintetică 299
9.4. Metoda Monte-Carlo (Modelarea stohastică) 305
Bibliografie 311

ANEXĂ 313

ABSTRACT 315

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

„Multe aspecte ale naturii nu pot fi nici descoperite cu suficientă subtilitate, nici demonstrate cu suficientă perspicacitate, nici adaptate utilizării cu suficientă îndemînare fără ajutorul și intervenția matematicii"

BACON

Descoperirea în primele decenii ale acestui secol a uneia dintre particulele elementare de bază în constituția materiei, neutronul, a avut în deceniile următoare repercusiuni profunde nu numai în fizică și tehnică, ci și în matematică.

Deși această afirmație ar putea părea nefondată nespecialiștilor, este suficient să amintim în sprijinul ei implicațiile matematice profunde pe care le-a avut acum mai bine de un secol descoperirea naturii moleculare a gazelor, a mișcării browniene și necesitatea de a le formula matematic. Teoria cinetică a gazelor și problemele conexe sau analoge din alte domenii au suscitat atunci interesul celor mai mari fizicieni și matematicieni ai lumii, dintre care unul singur, Boltzmann, a dat chiar numele principalei ecuații (o ecuație integro-diferențială neliniară) care guvernează aceste procese fizice.

Dar și astăzi continuă să apară lucrări remarcabile care denotă că procesele fizice respective ridică încă probleme fizice și matematice demne de toată atenția.

Descoperirea faptului că neutronii interacționează cu materia prin intermediul unor procese fizice a căror totalitate este studiată prin intermediul teoriei transportului neutronilor a condus în mod firesc la necesitatea de a-i deduce legile și ecuațiile de bază, precum și metodele de rezolvare sau de aproximare a acestor ecuații.

Întrucît în interacțiunea neutronilor cu materia se poate considera că aceștia se comportă ca un „gaz de neutroni", a fost natural ca acest proces de interacțiune să fie încadrat de la început printre cele guvernate de ecuația lui Boltzmann din teoria cinetică a gazelor. Neliniaritatea acestei ecuații integro-diferențiale, care s-a dovedit cu totul refractară în decursul unui secol la încercări de rezolvare exactă (afară de cîteva cazuri foarte idealizate) și care provine din luarea în considerare nu numai a interacțiunilor particulelor „gazului" cu mediul, ci și a particulelor între ele, dispare în cazul transportului neutronilor, datorită valorii excepțional de mici a probabilității de ciocnire neutron-neutron ($\sigma \simeq 10^{-42}$).

De un real folos în perioada inițială a fondării teoriei transportului neutronilor a fost și descoperirea a numeroase analogii ale proceselor de transport neutronice cu procese de transport din alte domenii, ca cele din astrofizică, din teoria cinetică a soluțiilor chimice, din teoria difuziei electronilor în metale, a difuziei căldurii, luminii etc., care au permis

Scanned with OKEN Scanner

folosirea directă a unora dintre rezultatele lor. Astăzi se întîlnește des și situația inversă, cînd rezultatele matematice din teoria transportului neutronilor se aplică la probleme caracteristice domeniilor analoge.

În acest mod, domeniul de o atît de mare importanță teoretică și practică al ecuațiilor fizicii matematice s-a îmbogățit în ultimele trei decenii cu o nouă ecuație : ecuația integro-diferențială liniară a transportului neutronilor (sau ecuația Boltzmann liniară), cu derivate parțiale de ordinul întîi.

Alături de alte ecuații celebre ale fizicii matematice, ca ecuația lui Laplace (eliptică), întîlnită în studiul potențialelor gravitaționale, magnetice sau electrostatice, fără surse, a temperaturilor staționare sau a fluidelor incompresibile, ca ecuația lui Poisson sau Helmholtz, ca ecuația de undă (hiperbolică) cea de difuzie (parabolică), cea a telegrafistului sau cele ale lui Maxwell, întîlnite în atîtea domenii ale fizicii și tehnicii, noua ecuație a ridicat de la început numeroase și dificile probleme, concretizate în cele peste 2 000 de lucrări ce i-au fost dedicate (vezi lucrarea bibliografică [R — 1]).

În numeroasele aproximații matematice și fizice necesare la tratarea problemelor practice întîlnite în teoria reactorilor nucleari, ecuația de transport pentru neutroni se reduce uneori la multe dintre tipurile de ecuații clasice amintite mai sus, ceea ce permite rezolvarea ei imediată prin transpunerea rezultatelor deja cunoscute.

Dificultatea esențială a rezolvării acestei noi ecuații a fizicii matematice constă nu atît în caracterul ei integro-diferențial, ci în dependența ei de un mare număr de variabile, care, printr-o serie de aproximări valabile (ca și cea privind probabilitatea interacțiunilor n-n), pot scădea la șapte : acestea sînt cele trei componente ale poziției neutronilor, cele două componente ale direcției lor și variabilele de energie și de timp (sau, în altă variantă, trei componente ale poziției, trei ale vitezei, care includ deci și energia, și una pentru timp).

O altă dificultate, care se va dovedi în cele din urmă un avantaj al ecuației de transport, îl constituie varietatea de forme pe care le poate lua în diversele aproximații.

Astfel, în formularea cea mai generală, ecuația de transport pentru neutroni este o ecuație integro-diferențială ; în aproximația nucleelor integrale sau a probabilităților de ciocnire, ea devine o ecuație integrală de tip Fredholm sau de tip Volterra ; în aproximația funcțiilor proprii singulare, ia forma unei ecuații integrale singulare ; ea se reduce la o ecuație diferențială în aproximațiile de difuzie, în problemele de cinetică a reactorului și în tratarea cuantică (ecuația Liouville) ; se transformă chiar în sisteme de ecuații algebrice în numeroasele aproximații polinomiale și matriceale și în aproximațiile numerice ale ordonatelor discrete sau ale variantelor lor ; în aproximațiile stohastice sau cele abstracte devine o ecuație funcțională, în timp ce ecuația stohastică Fokker-Planck a trans-

Scanned with OKEN Scanner

portului neutronilor se transformă prin matricealizare într-o ecuație Schrödinger, tipică în mecanica cuantică.

Problema centrală actuală a teoriei transportului neutronilor constă deci mai puțin în deducerea variantelor de ecuații caracteristice fiecărei situații fizice, cît mai ales în deducerea fie a metodelor de rezolvare exactă (unde principial este posibil), fie a metodelor de aproximare a ecuației de transport adecvate fiecărei situații.

Aproximațiile ecuației transportului sînt fie de natură fizică și conduc la ecuații mai simple, care pot fi rezolvate „exact" (în aceste cazuri unele probleme pot fi rezolvate exact matematic, dar fizic sînt aproximative), fie de natură matematică, care conduc de asemenea la rezultate exacte (în foarte puține cazuri) sau aproximative.

Aproximațiile fizice ale proceselor neutronice de transport, care permit deducerea ecuației de transport cu o dependență de „numai" șapte variabile, sînt numeroase, iar problema de bază în studiul lor o constituie determinarea valabilității acestor aproximații în funcție de situațiile tratate.

Cele mai importante aproximații fizice sînt :

1. Durata ciocnirilor* neutronilor cu nucleele mediului sau între ele este considerată neglijabilă ; această presupunere este valabilă, deoarece durata ei de 10^{-14} s (de fapt aceasta este viața medie a nucleului compound), care este mare față de timpul nuclear, este cu totul neglijabilă față de duratele caracteristice ale proceselor neutronice din reactor (de ordinul fracțiunilor de secundă).

2. Ciocnirile dintre neutroni sînt neglijate atît datorită probabilității lor foarte mici ($\sigma \simeq 10^{-42}$), cît și densității mult mai mici a neutronilor decît a nucleelor mediului cu care interacționează ($\sim 10^{8}\, n/\mathrm{cm}^3$ față de $\sim 10^{24}\, n/\mathrm{cm}^3$).

3. Interacțiunile neutron-mediu nu afectează natura acestuia din urmă.

Aproximațiile 2 și 3 sînt cele care asigură liniaritatea ecuației de transport pentru neutroni, dar, în timp ce aproximația 2 este general valabilă în toate cazurile întîlnite în fizica reactorilor, aproximația 3 este adesea infirmată în special în problemele de cinetică a reactorului, ca arderea combustibilului nuclear, acumularea de elemente transurane (efectul *breeding*) și „otrăvirea" cu produse de fisiune, încălzirea reactorului (efect Wigner) etc.

De aceea luarea în considerare a acestor efecte nu se poate face riguros decît prin intermediul ecuațiilor neliniare de transport privind stabilitatea reactorului, coeficienții lui de reactivitate etc.

Nu trebuie uitat de asemenea că în realitate interacțiunea neutronilor cu mediul respectiv este urmată de apariția neutrinilor, a radiațiilor gamma, a particulelor beta (electroni) și alfa, precum și a peste 300

* Prin ciocnire neutronică se înțelege aici un proces general de interacțiune a neutronilor cu nucleele mediului, care poate fi urmat de împrăștierea sau de absorbția neutronului, precum și de fisiunea nucleului.

de tipuri noi de nuclizi, ale căror interacțiuni ar trebui luate în considerare într-o tratare pedant de riguroasă. Din fericire, efectele acestora sînt de asemenea neglijabile în marea majoritate a cazurilor întîlnite în practică.

4. Natura ondulatorie sau cuanto-mecanică a neutronilor este neglijată. În realitate se întîlnesc cazuri, ca difracția neutronilor lenți pe medii cristaline, în care aceasta trebuie luată în considerare. Dar, în loc de a apela la o ecuație de transport complicată de prezența acestui efect, se folosește ecuația obișnuită cu secțiunile anizotrope.

Totuși, în cazul general, pentru a include direct și aceste efecte în ecuația de transport, este necesară definirea a două funcții de flux (și deci două ecuații) corespunzătoare spinului neutronului: o funcție Φ_r pentru neutronii cu elicitate dreaptă (adică spini paraleli cu direcția vitezei) și o funcție Φ_l pentru neutronii cu elicitate stîngă (spini antiparaleli cu direcția).

Întrucît secțiunile de interacțiuni neutronice depind de elicitatea neutronilor, această complicație nu este superfluă, și de fapt tocmai impreciziile în valorile actual cunoscute ale multor secțiuni neutronice importante în fizica reactorilor sînt cele care maschează efectele polarizării neutronilor.

Cele două ecuații de transport necesare la luarea în considerare a elicității neutronilor în experiențele de împrăștiere se extind de fapt la patru ecuații, deoarece amplitudinile de împrăștiere ale neutronilor depind de aceste elicități.

Amplitudinile de împrăștiere sînt însă mărimi complexe, care pot fi exprimate prin patru mărimi reale: matricele statistice ale amplitudinilor. Cele patru mărimi au sensuri fizice diferite: una reprezintă fluxul neutronic total al ambelor polarizări, iar celelalte descriu starea de polarizare a neutronilor în funcție de energia, de direcția și de poziția lor.

Neglijarea polarizării neutronilor este justificată în unele cazuri atît de diferența mică dintre valorile secțiunilor neutronice pentru cele două elicități, cît și de mare frecvență a tranzițiilor neutronilor între acestea două, care fac ca și diferența dintre cele două funcții de flux Φ_r și Φ_l să fie neglijabilă [W — 1].

În cazurile de împrăștiere a neutronilor rapizi pe nuclee s-a observat experimental că efectele de polarizare sînt importante, amplitudinile lor depinzînd în special de elicitățile neutronilor și mai puțin de polarizarea țintei (nucleelor). Explicația acestui efect este dată de interacțiuile spin-orbită ale neutronilor și nucleelor.

Cercetările recente au arătat că efectele polarizării neutronilor se observă în primul rînd în variațiile valorii coeficientului de difuzie D, care sînt de 1—2% pentru nucleele uzuale în reactor și pentru energii neutronice de ~ 1 MeV, dar pot crește la 10—20% pentru nuclee ca Mg și Si și la energii neutronice de ~ 20 keV [0—1].

Scanned with OKEN Scanner

Studiul matematic al acestor probleme prin dezvoltarea în armonici sferice a fluxurilor polarizate a arătat că în aproximaţia P_1 efectul polarizării neutronilor apare ca o creştere a secţiunii de transport Σ_{tr} [B—1].

5. Fluctuaţiile densităţii neutronilor au fost în general neglijate, nefiind nici ele incluse în ecuaţia de transport, considerîndu-se că la majoritatea reactorilor uzuali efectele lor sînt foarte mici. Totuşi, ele au fost studiate în cazul ansamblurilor critice mici, pentru reactorii pulsaţi sau de puteri mici şi pentru perioada iniţială a pornirii reactorilor, adică în toate cazurile în care avem densităţi iniţiale mici de neutroni şi fluctuaţiile pot avea efecte foarte importante.

Există însă şi problema fluctuaţiilor densităţilor mari de neutroni (densităţi de ordinul 10^6—10^{10} n/cm^3), care nu a fost tratată, după cît se pare, de nici un autor, considerîndu-se că efectele lor sînt neglijabile în acest caz. Wigner [W—1] atrage însă atenţia asupra faptului că presupunerea că densităţile de neutroni din reactor sînt suficient de mari încît să se poată lucra cu valori medii ale mărimilor neutronice nu este corectă în toate cazurile. Dar ea este totuşi valabilă tocmai datorită existenţei acestor fluctuaţii neglijate ale proceselor neutronice individuale, care au tendinţa de a se echilibra, permiţînd evidenţierea doar a valorilor medii.

Luarea în considerare a fluctuaţiilor în teoria transportului neutronllor, care nu se poate efectua prin intermediul ecuaţiei lui Boltzmann, apare cu totul naturală în formularea stohastică a problemelor de transport, în cea cuanto-mecanică, în înglobarea invariantă şi chiar în cea termodinamică (vezi cap. 5, 6 şi 8).

6. Mişcarea neutronilor este determinată complet de ciocnirile cu nucleele mediului, conform legilor clasice ale ciocnirilor. Între ciocniri, neutronii se mişcă rectiliniu şi cu viteză constantă, sau, cu alte cuvinte, distanţa medie parcursă de neutroni între ciocniri (adică drumul liber mijlociu) este constant pentru o viteză dată a neutronilor şi pentru un mediu dat. Aceste presupuneri sînt printre cele mai apropiate de realitate, datorită independenţei neutronilor de prezenţa unor cîmpuri gravitaţionale, electrostatice sau magnetice, singurele care ar putea să le infirme.

Se mai presupune că neutronii secundari apar chiar în poziţia ciocnirii celor iniţiali, deoarece distanţa dintre poziţia ciocnirii şi cea a apariţiei neutronilor este cu totul neglijabilă faţă de distanţele caracteristice din procesele de transport neutronice (care sînt de ordinul drumului liber mijlociu).

7. Funcţia de distribuţie spaţială a fisiunilor provocate de neutroni în uraniu (toriu, plutoniu etc.) este considerată izotropă în sistemul laborator şi independentă de energia neutronilor. Datele experimentale confirmă că în primă aproximaţie această presupunere este corectă.

Scanned with OKEN Scanner

8. Funcția de distribuție a împrăștierilor inelastice (cu pierdere de energie) ale neutronilor este izotropă în sistemul laborator.

9. Energia legăturilor chimice ale atomilor mediului în care are loc transportul neutronilor, ca și efectele de rețea cristalină și de agitație termică a atomilor mediului, este considerată neglijabilă. Această presupunere este valabilă numai pentru neutronii de energii mari a căror viteză este mult mai mare decît a atomilor mediului; la energii foarte mici ale neutronilor, aceste efecte devin importante, apărînd chiar transfer de energie de la agitația termică a mediului către neutroni, ceea ce impune abordarea problemelor de retermalizare.

Această presupunere condiționează și conservarea energiei cinetice în împrăștierile elastice.

10. Secțiunile neutronice sînt considerate independente de valoarea fluxurilor neutronice. În majoritatea reactorilor de puteri mici sau mijlocii, în care otrăvirea sau acumularea de transurane nu este importantă, această aproximație este valabilă. La reactorii cu fluxuri intense de neutroni, ea trebuie înlocuită prin dependența secțiunilor de flux, ceea ce conduce la o ecuație de transport neliniară.

11. Dezintegrarea neutronilor nu este luată în considerare ($T_{1/2} = 12'10$). Această presupunere este valabilă atîta timp cît procesele incluse în transportul neutronilor au loc în intervale de timp mult mai scurte: fisiunea are într-adevăr loc în intervale cu mult mai mici de timp; viața medie a neutronilor pînă la captură în mediile uzuale din reactor este de asemenea foarte scurtă (0,2 ms în H_2O, 12,2 ms în grafit, 4 ms în Be și 7,6 ms în BeO). Duratele obișnuite ale proceselor studiate de cinetica reactorilor sînt de asemenea mai scurte.

Ținînd seama de aceste aproximații fizice ale proceselor de transport ale neutronilor, există două posibilități principial diferite de a aborda studiul lor:

a) metoda „macroscopică" (clasică sau Boltzmann) prin care se deduce bilanțul populației neutronice dintr-un element de volum în urma proceselor nucleare care au loc în acesta;

b) metoda „microscopică", în care fiecare neutron este urmărit separat de-a lungul întregii sale „istorii", compusă din procesele la care ia parte în reactor pînă la dispariția sa prin absorbție sau prin scăpări în exterior.

Majoritatea aproximațiilor matematice ale transportului neutronilor* se referă la prima metodă, în timp ce a doua metodă, mai dificilă, dar furnizînd o mai mare cantitate de informație, este ilustrată de aproximațiile stohastice (Monte Carlo, mers la întîmplare etc.) și de cele de înglobare invariantă.

---

* Transportul neutronilor, care este procesul fizic al interacțiunii neutronilor cu materia și care poate fi abordat matematic în diverse moduri nu trebuie confundat cu aproximația de transport a transportului (!) neutronilor, descrisă la punctul a.

Scanned with OKEN Scanner

Între cele două metode s-au găsit numeroase legături şi echivalenţe, datorită faptului că descriu unul şi acelaşi proces fizic, dar din punct de vedere matematic ele se găsesc în aceleaşi relaţii ca integrarea Riemann şi cea Lebesgue sau ca ecuaţiile hidrodinamice ale lui Euler şi Lagrange.

Ecuaţia de transport se obţine în aproximaţia Boltzmann prin calculul bilanţului neutronilor într-un element de volum al reactorului, ţinînd seama de toate aproximaţiile fizice (1 —11) amintite mai sus. Notînd, ca de obicei, cu $N(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}, t)\, dv d\Omega$ densitatea neutronilor în punctul r, care au viteze cuprinse în intervalul de la v la $v + dv$, şi cu direcţii cuprinse în conul $d\Omega$ din jurul lui $\mathbf{\Omega}$ la momentul t, scriem ecuaţia bilanţului neutronilor, adică variaţia densităţii lor în funcţie de diversele procese la care pot da naştere în reactor:

variaţia temporală a densităţii N = împrăştiere în v şi $\mathbf{\Omega}$ din alte regiuni şi direcţii + surse — scăpări — împrăştieri în alte regiuni şi direcţii

Termenul împrăştierilor în v şi $\mathbf{\Omega}$ se deduce cunoscînd numărul de neutroni cu viteza v′ şi direcţia $\mathbf{\Omega}'$, care suferă ciocniri de împrăştiere în elementul de volum dV:

$$\mathrm{v}' \sum (\mathrm{v}')\, N(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}', t)\, dv\, d\Omega\, dV, \tag{1}$$

iar numărul de neutroni ce apar în elementul dv şi $d\Omega$ prin ciocnirea unui neutron de viteză v′ din direcţia $\mathbf{\Omega}'$ cu un nucleu al moderatorului este dat de:

$$c(\mathrm{v}')\, f(\mathrm{v}', \mathbf{\Omega}' \to \mathrm{v}, \mathbf{\Omega})\, dv\, d\Omega. \tag{2}$$

Produsul lor, integrat pe întregul volum al reactorului, reprezintă termenul împrăştierilor spre elementul de volum dV:

$$dv\, d\Omega\, dV \iint \mathrm{v}'\, c(\mathrm{v}') \sum (\mathrm{v}')\, f(\mathrm{v}', \mathbf{\Omega}' \to \mathrm{v}, \mathbf{\Omega})\, N(\mathbf{r}, v', \mathbf{\Omega}', t)\, dv' d\Omega'. \tag{3}$$

Funcţia $f(\mathrm{v}', \mathbf{\Omega}' \to \mathrm{v}, \mathbf{\Omega})$ este cunoscută sub denumirea de funcţie de împrăştiere, şi majoritatea presupunerilor simplificatoare în legătură cu împrăştierea inelastică şi elastică sau cu energia de legătură chimică a atomilor mediului se referă la modul de deducere a acestei funcţii.

Termenul sursă se notează în general prin

$$S(\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}, t)\, dv d\Omega dt \tag{4}$$

şi reprezintă numărul de neutroni emişi de diversele surse posibile (fisiuni, surse externe etc.) din elementul de volum dV, din punctul r, în conul direcţiilor $d\Omega$ şi în intervalul de viteze $v \to v + dv$.

Scanned with OKEN Scanner

Termenul scăpărilor de neutroni din elementul de volum dV se deduce ca diferența dintre curentul de neutroni ce se deplasează cu viteza v spre dV în direcția Ω,

$$v\Omega_x N(x, y, z)\, dydz + v\Omega_y N(x, y, z)\, dxdz + v\Omega_z N(x, y, z)\, dxdy, \tag{5}$$

și curentul de neutroni ce ies din dV în aceeași direcție Ω:

$$v\Omega_x N(x + dx, y, z)\, dy\, dz + v\Omega_y N(x, y + dy, z)\, dx\, dz + v\Omega_z N(x, y, z + dz)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Această diferență se poate pune sub forma

$$\left[v\Omega_x \frac{dN}{dx} + v\Omega_y \frac{dN}{dy} + v\Omega_z \frac{dN}{dz}\right] dV = v\boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{N}\, dV. \tag{7}$$

Termenul împrăștierilor neutronilor din v, Ω și dV în alte regiuni este dat de expresia (1), dar pentru valorile respective

$$v \sum (\mathbf{v})\, N(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t). \tag{8}$$

Cu aceste expresii, ecuația de transport al neutronilor exprimată de ecuația bilanțului neutronilor în elementul de volum dV ținînd seama de procesele mai importante pe care le suferă neutronii în reactor, devine

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} = -v\boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} N(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) - \mathbf{v} \sum (\mathbf{v})\, N(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t) + \iint \mathbf{v}'\, c(\mathbf{v}') \sum (\mathbf{v}')\, f(\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}' \to \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega})\, N(\mathbf{r}, v', \boldsymbol{\Omega}', t)\, dv'\, d\Omega' + S(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t). \tag{9}$$

Înlocuind variabila Ω prin $\mathbf{v}/v$, ecuația precedentă ia forma echivalentă

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = -v \operatorname{grad} N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \mathbf{v} \sum (\mathbf{r}, \mathbf{v})\, N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int \mathbf{v}, c(\mathbf{v}') \sum (\mathbf{r}, \mathbf{v}')\, f(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}')\, N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\, dv' + S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \tag{10}$$

Această ecuație de transport se exprimă formal diferit dacă în evaluarea bilanțului neutronilor se consideră ca mărime de bază în calcule:

— distribuția neutronilor $N(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)$ (ca în deducerea precedentă);
— fluxul neutronic direcțional $\Phi(\mathbf{r}, v, \boldsymbol{\Omega}, t)$;
— fluxul neutronic $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v}\, N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$;

Scanned with OKEN Scanner

— densitatea de ciocniri $Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{v} \sum (\mathbf{v}) N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$;

— deviaţia distribuţiei neutronice de la cea maxwelliană $M(v)$ definită prin $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)/M(v)$, unde

$$M(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{11}$$

m fiind masa neutronului.

Luînd în considerare caracterul vectorial al unora dintre variabile, se pot efectua şi transformări ale acestor variabile prin

$$\begin{aligned} &(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to (\mathbf{r}, v, \mathbf{\Omega}, t), \qquad \text{unde } \mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \\ &(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to (\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t), \qquad \text{unde } E = \frac{1}{2} mv^2, \\ &(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \to (\mathbf{r}, u, \mathbf{\Omega}, t), \qquad \text{unde } u = \log \frac{E_0}{E}. \end{aligned} \tag{12}$$

. . . . . .

Datorită complexităţii pronunţate a ecuaţiei (10) rezolvarea ei este imposibilă în majoritatea cazurilor generale şi dificilă în cazurile particulare, în care poate fi simplificată prin aproximări de natură fizică sau matematică.

Folosind separat aceste aproximări expuse la punctele 1—11 sau simultan, precum şi diversele geometrii care pot fi întîlnite în practică, se obţin toate cazurile particulare a căror deducere constituie (pe sute de pagini) subiectul unor tratate clasice de teorie a transportului neutronilor [D—1], [W—2]. Ele nu-şi mai găsesc, prin urmare, locul în această lucrare, fiind presupuse cunoscute. Deoarece însă în prezentarea noilor metode vom fi obligaţi să ne referim la un caz concret, îl vom alege pe cel al transportului neutronilor în cazul staţionar (independenţa temporală), în care variabila timp este eliminată în geometria plană, în care variabila spaţială r trece în x şi cea unghiulară Ω în μ, considerînd că toţi neutronii au aceeaşi energie (aproximaţie monogrup, pentru neutronii termici). În aceste condiţii, ecuaţia (10) ia forma

$$\mu \frac{\mathrm{d}\Phi(x, \mu)}{\mathrm{d}x} + \Sigma_t \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu') f(\mu' \to \mu)\, \mathrm{d}\mu' + (Sx, \mu). \tag{13}$$

Scopul esenţial al oricărei metode de aproximare matematică a soluţiei acestei ecuaţii de transport este eliminarea uneia sau mai multora dintre cele şapte variabile şi rezolvarea ecuaţiei simplificate.

Timpul este variabila a cărei eliminare se efectuează cel mai uşor, prin simpla anulare a termenilor care conţin variaţii în timp şi prin

Scanned with OKEN Scanner

considerarea diverselor mărimi ca fiind constante în timp. Este cunoscută sub denumirea de aproximația de transport staționară.

Timpul mai poate fi eliminat fie prin dezvoltarea distribuției neutronice în funcții exponențiale de forma $e^{\lambda_n t}$, fie mai ales prin transformarea ecuației de transport într-o problemă de valori caracteristice.

Un alt mod de a elimina variabila temporală este cel al transformării Laplace a densității neutronice din ecuația de transport dependente de timp, a rezolvării ecuației staționare obținute și a deducerii dependenței corecte temporale printr-o transformată Laplace inversă.

Energia neutronilor este o altă variabilă a cărei eliminare se efectuează relativ ușor.

O primă variantă se bazează pe presupunerea că toți neutronii au aceeași energie; este deci aproximația monogrup (monoenergetică, monoveloce ori monocromatică) sau a secțiunii constante, deoarece presupunerea de mai sus antrenează pe cea care consideră că secțiunile neutronice nu mai depind de energie.

Această aproximație este destul de grosolană, deoarece majoritatea parametrilor nucleari care intervin în rezolvarea ecuației de transport depind puternic de energia neutronilor. Totuși, ea a fost deseori folosită la reactorii cu neutroni rapizi, unde această presupunere este mult mai apropiată de realitate (variația energiei neutronilor acoperă trei unități de letargie) decît în cazul reactorilor termici (la care variația energiei reprezintă ~18 unități de letargie), precum și în problemele în care ne interesează nu atît încetinirea neutronilor (care depinde puternic de E), cît distribuțiile spațiale ale neutronilor.

Un alt motiv pentru care această aproximație monoenergetică a fost intens folosită îl constituie analogia cu unele probleme din astrofizică (transportul de radiație), a căror soluție era cunoscută și putea fi transpusă direct în teoria transportului neutronilor după o analiză a condițiilor în care există o reală corespondență.

Cînd aceste eliminări de variabile nu sînt permise de natura problemei, se recurge la artificiul metodei grupurilor prin care variabila nu mai este eliminată, ci doar discretizată (este presupusă a avea valori discrete pe o anumită rețea a domeniului ei de existență). Domeniul ei de variație este împărțit în n intervale egale sau ponderate după anumite legi, iar variabila respectivă este eliminată separat din intervale prin integrarea pe variabilă în fiecare dintre intervale.

Se obțin în felul acesta n ecuații de transport reduse, care sînt considerate ca un sistem simultan și rezolvate ca atare.

O tratare cu totul diferită a variației cu energia este cea a lui Fermi, cunoscută sub numele de teoria vîrstei neutronilor și în care domeniul de energii este considerat ca un continuu.

Metoda cea mai elegantă de a elimina o variabilă din ecuația de transport neutronică este însă cea a transformatelor Laplace sau Fourier (vezi § 2.4), deoarece această eliminare este numai aparentă. Prin trans-

Scanned with OKEN Scanner

formările inverse Laplace sau Fourier, variabila eliminată și întreaga ei informație este reintrodusă în soluție.

Variabila unghiulară, care prezintă cele mai multe dificultăți la rezolvarea acestor ecuații și care a condus la apariția celor mai multe metode de aproximare, poate fi eliminată sau ocolită fie prin luarea în considerare doar a problemelor cu caracter izotrop, în care dependența unghiulară a diverselor funcții dispare, fie prin utilizarea transformatelor integrale (Laplace, Fourier, Mellin, Hankel etc.), fie prin discretizarea variabilei unghiulare, ca în metoda ordonatelor discrete (a lui Wick-Chandrasekhar) sau în metoda S_n (segmentarea unghiulară a lui Carlson).

Dar metoda cea mai folosită în eliminarea variabilei unghiulare este cea a dezvoltării în diverse polinoame a funcțiilor neutronice care conțin această variabilă. Se obțin, ca și în aproximația grupală, sisteme finite de ecuații prin trunchierea acestor dezvoltări în funcție de natura problemei și de precizia cerută soluțiilor.

În ceea ce privește *variabila spațială*, ea nu este de obicei eliminată, deoarece majoritatea mărimilor neutronice furnizate de ecuația de transport ne interesează și în dependența lor spațială. Totuși, pentru ușurarea calculelor se folosește adesea discretizarea acestei variabile, ca în metoda diferențelor finite sau în cea a relaxării.

Criteriile de stabilire a variabilelor ce trebuie eliminate din ecuația de transport depind de fiecare problemă în parte. Astfel, în problemele de cinetică a reactorilor nu va putea fi neglijată în nici un caz variabila temporală, în timp ce în statica reactorului se face constant abstracție de ea.

În problemele de încetinire a neutronilor, variabila cea mai importantă este energia sau viteza neutronilor, care nu va fi deci eliminată, ci cel mult discretizată sau transformată integral.

Asimetriile pronunțate prezente în cadrul unei probleme impun de asemenea luarea în considerare a variabilei unghiulare.

În această lucrare se consideră că dezvoltarea în anumite polinoame — armonicile sferice — a dependenței unghiulare și discretizarea variabilei de energie sau de viteză neutronică în cadrul aproximației grupale, care au fost intens aplicate încă de la începutul teoriei transportului neutronilor la rezolvarea ecuației de transport, pot fi considerate aproximații clasice sau de referință ale acestei teorii (vezi § 1.1).

În raport cu acestea, toate celelalte metode de aproximare matematică formulate ulterior pentru rezolvarea aceleiași ecuații vor fi considerate noi aproximații în teoria transportului și se vor integra deci în mod natural în tematica acestei lucrări.

Printre acestea se numără (cap. 1) perfecționările aduse însăși aproximației armonicilor sferice prin schimbarea metodei de trunchiere, prin eliminarea necesității de trunchiere prin transformări integrale sau prin utilizarea aproximațiilor pare și a armonicilor sferice duble.

Scanned with OKEN Scanner

Tot în cadrul *aproximațiilor polinomiale* se numără și înlocuirea dezvoltării în polinoame Legendre cu polinoame Jacobi-Gegenbauer, Cebîșev, Hermite sau Laguerre și, în general, cu polinoame ortogonale sau chiar biortogonale, mult mai avantajoase în numeroase probleme.

O altă mare categorie de noi aproximări folosite în teoria transportului sînt cele integrale (cap. 2), ale căror principale calități sînt precizia mai bună a rezultatelor și aplicabilitatea la geometrii și la situații fizice mai complexe.

Alături de *aproximațiile integrale* ale probabilităților de ciocnire, ale transformărilor integrale sau ale nucleelor integrale, este prezentată și remarcabila aproximație a funcțiilor proprii singulare, care a lărgit considerabil domeniile în care pot fi obținute rezultate exacte. Importanța acestora nu este numai cea intrinsecă, ci ea constă mai ales în posibilitatea verificării prin comparare a valabilității altor aproxmații și a rezolvării unor probleme din teoria spectrală a reactorilor nucleari.

Metodele *calculului variațional și al teoriei perturbației* au condus în teoria transportului neutronilor la rezultate remarcabile prin precizia lor și prin domeniul larg de probleme teoretice și practice la care au găsit aplicații (cap. 4). Bazîndu-se pe deducerea unor expresii variaționale, din care apoi se derivă ecuații caracteristice proceselor neutronice din reactor pe baza proprietății de staționaritate a acestor expresii, metoda variațională a furnizat soluționări ale ecuației de transport în problemele de criticitate, de termalizare a neutronilor, de calcul al parametrilor rețelei, precum și la determinarea distribuțiilor neutronice. Aceste soluționări sînt mai simple decît cele întîlnite de exemplu la tratarea variațională a problemelor din mecanica cuantică, datorită pozitivității funcțiilor neutronice.

Pe de altă parte, teoria perturbației, echivalentă cu metoda variațională în anumite cazuri, a fost aplicată cu succes în problemele de cinetică a reactorilor, de criticitate, de evaluare a efectelor perturbatoare asupra stabilității reactorului. În cadrul acestei teorii au apărut noțiuni noi, deosebit de importante pentru teoria reactorilor, ca cele de flux adjunct, ecuație de transport adjunctă și semnificația lor cuprinsă în noțiunea de funcție de importanță a reactorului.

Aspectele *cuanto-mecanice* (cap. 6), neglijate pînă acum în tratarea „clasică" a transportului neutronilor, s-au dovedit necesare la luarea în considerare a problemelor legate de polarizarea neutronilor sau de fluctuațiile densității neutronilor în reactor, la calculul cărora alte metode de abordare ale teoriei transportului neutronilor nu pot furniza răspunsuri corecte. Fenomenele de interacțiuni și interferențe neutronice la energii mici ale neutronilor, importante mai ales în analiza neutronografică a corpului solid sau a lichidelor, sînt de asemenea efecte tipic cuanto-mecanice și abordarea lor nu se putea efectua decît în cadrul unei tratări cuanto-mecanice a transportului neutronilor.

Scanned with OKEN Scanner

O categorie distinctă de aproximări ale soluţiilor ecuaţiei de transport neutronice şi care are meritul deosebit de a constitui legătura dintre formulările şi preocupările teoretice şi cele practice este reprezentată de *aproximaţiile numerice* (cap. 9).

Dintre numeroasele metode de aproximare numerică a ecuaţiilor fizicii matematice, au fost expuse în această lucrare doar cele care au găsit o utilizare majoră în teoria transportului neutronilor sau care au fost imaginate special pentru această teorie. Printre acestea se numără aproximaţiile ordonatelor discrete sau cele ale segmentării unghiulare, în care variabila unghiulară este eliminată din ecuaţia de transport prin polinoame de interpolare; aproximaţia Monte-Carlo, în care fiecare neutron este „urmărit" analitic, la maşini electronice de calcul, prin intermediul unor probabilităţi ce reprezintă diversele procese la care neutronii pot participa în reactor.

Metodele iterative, cele de factorizare sau de relaxare, precum şi metoda momentelor, fiind mai generale şi comune multor altor domenii ale fizicii matematice, nu vor fi cuprinse în acest capitol.

Generalitatea proceselor de transport a condus însă şi la încercări de abordare a lor din puncte de vedere principial diferite de formularea Boltzmann. Printre acestea se numără:

— *aproximaţia înglobării invariante* (cap. 3), bazată pe folosirea unor principii generale de invarianţă în tratarea proceselor neutronice din reactor. Prin înglobarea acestor procese, în clase mai generale de procese, se obţin ecuaţii integro-diferenţiale neliniare cu condiţii iniţiale (caracteristica ecuaţiei de transport Boltzmann era constituită de condiţiile la margine, mai dificile de evaluat);

— *aproximaţia termodinamică* (cap. 5), în care s-a dedus o ecuaţie de transport analogă celei a lui Boltzmann, folosind principii variaţionale tipic termodinamice, ca principiul persistenţei maxime sau cel al minimalităţii entropiei, şi noţiuni termodinamice, ca cele de entropie a neutronilor sau a moderatorului, temperatura „gazului" de neutroni etc. Descoperirea acestei analogii a permis extinderea metodelor de aproximare tipice teoriei termodinamice la soluţionarea ecuaţiei de transport;

— *aproximaţia abstractă* (cap. 7), în care procesele şi funcţiile neutronice sînt reprezentate şi tratate prin operatori generali de evoluţie în spaţii Banach sau prin teoria matematică spectrală a funcţiilor pozitive a ecuaţiilor obţinute pentru aceste procese;

— *aproximaţiile stohastice* (cap. 8), bazate fie pe analiza individuală a unui mare număr de neutroni, ca în variantele de mers la întîmplare, de procese de reînnoire (*renewal*) sau de procese de ramificare (*branching*), fie pe determinarea analitică prin funcţii generatoare de probabilităţi a diferitelor mărimi neutronice.

Aceste noi puncte de vedere şi de abordare a teoriei transportului neutronilor au furnizat, pe lîngă rezultate remarcabile, şi perspective

Scanned with OKEN Scanner

nebănuite în descoperirea unor aspecte necunoscute şi posibilitatea evidenţierii unor legături profunde cu alte domenii ale fizicii matematice.

Astfel, pe lîngă legăturile şi, în unele cazuri, chiar echivalenţele stabilite pentru teoria transportului neutronilor cu termodinamica proceselor ireversibile, cu teoria spectrală a operatorilor liniari, cu teoria proceselor stohastice etc., s-au mai pus în evidenţă legături între această teorie şi cea a funcţiilor caracteristice din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale prin intermediul funcţiilor generatoare de probabilităţi din tratarea stohastică. Aceeaşi formulare stohastică, prin intermediul legăturilor dintre teoria proceselor Markov şi programarea dinamică, a condus la folosirea celei din urmă la probleme de optimizare în transportul neutronilor, în timp ce prin echivalenţa ecuaţiei Fokker-Planck matricealizate (care este analoga stohastică a ecuaţiei de transport) cu ecuaţia cuantomecanică a lui Schrödinger au putut fi studiate fluctuaţiile densităţilor neutronice.

O altă legătură a teoriei transportului neutronilor cu teoria programării dinamice a fost stabilită o dată cu descoperirea faptului că folosirea principiilor de invarianţă în tratarea transportului, în cadrul metodei înglobării invariante, constituie o variantă de liberă decizie din programarea dinamică. Aceleaşi principii de invarianţă, prin legăturile lor naturale cu principiile de cauzalitate (de tip Hadamard) au arătat legăturile cu teoria semigrupurilor, în timp ce într-o formulare matriceală (matricea de răspuns echivalentă înglobării invariante) ele au sugerat legături cu teoria potenţialului generalizat (vezi cap. 3).

Tot în teoria semigrupurilor de operatori se stabilesc legături şi prin intermediul ecuaţiilor Chapman-Kolmogorov, obţinute în tratarea stohastică a transportului neutronilor.

Se poate deci considera pe bună dreptate că diversele capitole expuse în această carte reprezintă aportul remarcabil pe care numeroase ramuri ale matematicii şi fizicii matematice l-au adus în ultimii ani la domeniul atît de fecund — teoretic şi practic — al teoriei transportului neutronilor, în ciuda decalajului dintre preocupările şi rezultatele matematicii „pure" şi ale celei aplicate. Se constată însă din fericire că, pe măsură ce acest decalaj dintre matematica pură şi cea aplicată (reprezentată prin fizico-matematică) creşte ca urmare a dezvoltării tot mai abstracte a matematicii moderne, apar noi punţi de legătură între acestea două, fie prin problemele noi pe care diversele ramuri aplicative ale ştiinţei le pun matematicii, fie prin metodele matematice noi de abordare, de soluţionare sau de aproximare pe care ea le pune la îndemînă.

Sperăm ca această lucrare să constituie o astfel de punte şi să fie în acest mod adeverite şi cuvintele cunoscutului fizician E. P. Wigner: „The purpose of my remarks (at a Transport Theory Symposium) was to convey not only the impression that the science of reactors could be much helped by the attention of mathematicians interested in its problems, but also that mathematicians can find many interesting and challenging

Scanned with OKEN Scanner

problems in reactor science. Of the two broad fields which were mentioned, the theory of the reactor equations, and the methods of their solutions, I consider the first one even more interesting and even more important than the second one".*

Lucrarea ale cărei jaloane principale şi limite au fost schiţate în rîndurile precedente şi care este dezvoltată în capitolele următoare are drept scop să prezinte *cititorilor de specialitate* perspectivele actuale ale teoriei transportului neutronilor şi a legăturilor ei cu problemele practice de fizică şi tehnică a reactorilor nucleari.

Prin vastitatea şi caracterul domeniilor incluse, al metodelor de abordare şi de expunere, *lucrarea de faţă constituie o monografie „de informare"* şi nu una de fond *a a proximaţiilor noi în teoria transportului neutronilor.* Acest mod de expunere implică însă cunoaşterea din partea cititorilor a unui minim de elemente din teoria transportului neutronilor şi din metodele de aproximare clasice ale soluţionării ecuaţiilor ei, expuse în remarcabilele lucrări [D—1], [W—1], [W—2], [B—2], [C—1], [I—1], [T—1] [W—3], [W—4]. Sub această formă, cartea prezintă interes atît din punctul de vedere al fizicii reactorilor cît şi al aplicaţiilor practice în proiectarea reactorilor sau în experienţele de neutronică.

Interesul acestei lucrări poate decurge şi din faptul că unele aproximaţii noi pe care le include nu au apărut pînă acum în nici o carte din literatura mondială de specialitate, fiind întîlnite numai în articole originale, mai greu accesibile unor categorii largi de cititori.

Caracterul pur informativ al lucrării o încadrează într-o categorie aparte de publicaţii, care au început să apară în ultimii ani datorită excepţionalei dezvoltări a cercetărilor practice şi teoretice din acest domeniu. Spre deosebire de tratate, de cursuri sau de manuale, care îşi propun expunerea în amănunt a materialului, însoţit de demonstraţii riguroase şi cu un pronunţat caracter didactic, *lucrările monografice de informare îşi propun doar o trecere în revistă foarte generală a numeroaselor probleme care au fost sau pot fi abordate în cadrul domeniului respectiv.* Aceste lucrări se caracterizează deci printr-o bibliografie foarte bogată şi prin expunerea doar a ceea ce este esenţial în fiecare problemă (avantaje, dezavantaje, ce aduc nou faţă de rezolvările clasice), urmînd ca specialiştii cărora le este adresată în exclusivitate o astfel de lucrare să apeleze pentru aprofundare la sursele indicate.

În acest mod sînt concepute şi remarcabilele lucrări [B — 2] [I — 1], [W — 1].

Am considerat necesar a sublinia particularităţile acestui tip de publicaţii pentru a preîntîmpina eventualele nedumeriri privitoare la

* „Scopul remarcilor mele a fost nu numai de a scoate în relief faptul că ştiinţa reactorilor nucleari poate profita mult de atenţia matematicienilor interesaţi de aceste probleme, dar că şi matematicienii pot găsi în teoria reactorilor probleme care să-i intereseze şi să-i stimuleze.

Din cele două mari domenii — teoria ecuaţiilor reactorului nuclear şi metodele rezolvării lor — consider că primul este mai interesant şi chiar mai important decît al doilea".

Scanned with OKEN Scanner

caracterul acestei lucrări. Şi cred că nu este lipsit de interes să amintim că înseşi fluctuaţiile iniţiale ale denumirilor acestui tip de publicaţii („bibliografie comentată", „repertoar" de probleme sau de metode teoretice, experimentale etc. dintr-un anumit domeniu), care s-au stabilizat în ultimul timp la termenul de „monografie informativă", reflectă într-o oarecare măsură conţinutul lor.

În privinţa utilităţii monografiilor informative, este important de subliniat că ele şi-au făcut pînă acum simţită necesitatea în special în domeniile care cunosc o dezvoltare foarte rapidă şi o utilitate practică pronunţată, care nu au permis o definitivare, o aprofundare şi o finisare adecvată a unei teorii a întregului domeniu. În această situaţie se află prin excelenţă domeniul fizicii reactorilor nucleari şi al metodelor de aproximare în calculul şi proiectarea lor, în care au apărut numai în ultimii ani peste 2 000 de lucrări originale şi zeci de metode noi de calcul aproximativ.

Nu putem însă încheia acest capitol introductiv fără a atrage atenţia în mod deosebit asupra unei particularităţi importante a domeniului abordat în lucrare, şi anume lipsa de rigurozitate matematică a unora dintre metodele de rezolvare a ecuaţiei de transport sau mai ales a unora dintre presupunerile necesare acestei rezolvări. Aceasta se mai referă uneori la modul de punere a problemei, alteori la condiţiile de existenţă şi de unicitate ale soluţiilor, dar, din fericire, nu şi la obţinerea soluţiilor numerice, după cum ne putem convinge după excepţionalele şi variatele realizări din acest domeniu.

Acest paradox a atras atenţia unor matematicieni cunoscuţi, ca Birkhoff, Bellman sau Wing, care au publicat lucrări de teorie a transportului neutronilor [B — 2], [W — 3] în care au căutat să fundamenteze matematic rezultatele obţinute pe baza a ceea ce ei au numit „folklor matematic" al fizicienilor. Ei au arătat că obţinerea unor rezultate totuşi corecte se datoreşte în multe cazuri unor intuiţii fizice corecte. Chiar una dintre presupunerile fundamentale din teoria transportului neutronilor, referitoare la separabilitatea distribuţiei neutronice după variabile şi care reprezintă chiar prima teoremă fundamentală a teoriei reactorilor nucleari, nu este corectă din punct de vedere matematic decît în condiţii foarte restrictive.

BIBLIOGRAFIE

B—1 Bell G. I. et al., NSE, **23**, 380 (1965).

B—2 Birkhoff G., *Some mathematical problems of nuclear reactor theory : Frontieres of Numerical Mathematics*, Univ. of Wisconsin Press, 1960.

C—1 Case K. M. et al., *Introduction to the theory of neutron diffusion*, LASL — 1953 (Washington U.S. Gov. Print. Off.).

C—2 Case K. M., et al., *Linear transport theory*. Addison-Wesley Publ. Co. 1967.

C—3 Clark M. Jr. et al., *Numerical methods of reactor analysis*. Academic Press, New York, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

C—4 Carter C. et al., J.N.E. **15**, 1, 1961.
D—1 Davison B., *Neutron transport theory.* Oxford, Clarendon Press, 1957.
I—1 Inönü E. et al. (edit.) *Developments in transport theory*, Londra, Academic Press, 1967.
O—1 Orlov E. V. et al., PICG, **2**, 422 (1964).
O—2 Osborn R. K. et al., *Foundations of neutron transport theory*, ANS. Dept. Nucl. Engin. Univ. of Michigan.
R—1 Roşescu T., *Neutron Transport Theory* (Bibl.), IFA—FR—48, 1966, IFA—FR—51,. 1966.
T—1 Tait J. H., *An introduction to neutron transport theory*, Londra, Longmans, Green and Co., 1964.
W—1 Wigner E. P., *Mathematical problems of reactor theory*, Proc. Symp. Appl. Math., XI. 89 (1961)
W—2 Weinberg A. M. et. al., *Theory of neutron chain reactors*, University of Chicago Press, 1958.
W—3 Wing G. M., *An introduction to transport theory*, New York, John Wiley and Sons, 1962,
W—4 Woods L. C., *Introduction to neutron distribut·on theory*, Londra, Methuen and Co. Ltd, 1964.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

Aproximaţii polinomiale

Una dintre metodele cele mai folosite la rezolvarea nu numai a ecuaţiei de transport, ci a multor ecuaţii diferenţiale sau integro-diferenţiale ale fizicii-matematice, prin eliminarea dependenţei de una dintre variabile, este cea a dezvoltării în diverse polinoame a funcţiilor ce intervin în ecuaţii şi care depind şi de variabila respectivă*.

În cazul ecuaţiei integro-diferenţiale a transportului neutronilor, aproximaţiile polinomiale permit transformarea acesteia într-un sistem de ecuaţii diferenţiale mai uşor de rezolvat. În majoritatea cazurilor, aceste aproximaţii se referă la variabila unghiulară Ω, care reprezintă direcţia vitezelor neutronilor (sau variabila unghiulară μ în geometrie plană), şi au ca prim efect înlocuirea termenului integral (şi a marilor dificultăţi legate de luarea lui în considerare) printr-o sumă mult mai simplu de evaluat.

1.1. Aproximaţia P_n (a armonicilor sferice sau a polinoamelor Legendre)

Sugerată de Jeans încă din 1917 pentru folosirea la rezolvarea ecuaţiei de transport (neliniare) a transferului radiativ în atmosfera stelară, aproximaţia armonicilor sferice a fost reluată cu mult succes de grupul care se ocupa de teoria reactorilor la proiectul Manhathan în primii ani ai războiului (1941—1942), la rezolvarea problemelor de teorie liniară a transportului neutronilor.

Fundamentată în special prin lucrările lui Placzek, Mark şi Davison, care i-au stabilit limitele de aplicabilitate şi elementele fundamentale caracteristice noului domeniu, această aproximaţie a cunoscut cel mai mare număr de aplicaţii în rezolvarea problemelor practice şi fizice puse de proiectarea, perfecţionarea, funcţionarea şi utilizarea reactorilor nucleari în cele două decenii care au trecut de la construirea primilor reactori (2 decembrie 1942).

Aproximaţia armonicilor sferice va fi expusă în rezumat în cele ce urmează numai pentru a servi ca termen de comparaţie pentru toate celelalte aproximaţii considerate noi.

---

* Problema de existenţă şi de unicitate a soluţiilor, de convergenţă şi de eroare prin trunchiere sînt tratate amănunţit în [C—2] [D—1] [W—1]...

Scanned with OKEN Scanner

Esențialul în această aproximație, devenită „clasică" în teoria transportului neutronilor, constă în eliminarea variabilei unghiulare (Ω) din ecuația de transport prin dezvoltarea în armonici sferice a tuturor funcțiilor care apar în ecuație și depind de această variabilă (distribuții neutronice, surse, funcții de împrăștiere etc.).

Prin această dezvoltare, ecuația integro-diferențială de transport se transformă într-un sistem infinit de ecuații diferențiale cuplate, care devine finit în urma trunchierii dezvoltării în armonici sferice la un anumit termen *.

Considerînd pentru simplitate ecuația de transport în aproximația monodimensională (geometrie plană) și monoenergetică, fără surse ($S=0$) (ec. 13)

$$\mu \frac{d\Phi(x,\mu)}{dx} + \sum_t \Phi(x,\mu) = \frac{c}{2}\int_{-1}^{+1} \Phi(x,\mu') f(\mu' \to \mu)\, d\mu, \qquad (1.1)$$

se dezvoltă fluxul direcțional $\Phi(x,\mu)$ în polinoame Legendre** :

$$\Phi(x,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(x) P_n(\mu), \qquad (1.2)$$

în care $\Phi_n(x)$ sînt coeficienții dezvoltării :

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^{+1} \Phi(x,\mu) P_n(\mu)\, d\mu. \qquad (1.3)$$

Funcția de împrăștiere este și ea dezvoltată în aceste armonice sferice, conducînd la expresia

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} F_n P_n(\mu) \qquad (1.4)$$

unde

$$F_n = \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_n(\mu)\, d\mu. \qquad (1.5)$$

Introducînd aceste dezvoltări în ecuația (1.1), înmulțindu-le cu $P_m(\mu)$ folosind relațiile de ortogonalitate ale polinoamelor Legendre

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_m(\mu)\, d\mu = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \qquad (1.6)$$

și ținînd seama de faptul că prin definiție, $\Phi_0(x)$ dat de (1.3) este fluxul de neutroni, $\Phi_1(x)$ este curentul de neutroni, $F_0=1$ și F_1 este cosinusul unghiului dintre direcțiile neutronilor înainte și după ciocnire, se obține sistemul finit de $(n+1)$ ecuații diferențiale cuplate, dacă dezvoltările precedente

* Eroarea prin trunchiere este evaluată în [B−2] [D−1]...

** Cînd fluxul neutronic $\varnothing(x,\mu)$ este definit pe unghiul solid, în dezvoltare apare $\frac{2n+1}{4\pi}$, în timp ce la definirea pe cosinus apare $\frac{2n+1}{2}$.

sînt trunchiate la termenul N prin condiția $\Phi_{N+1} = 0$:

$$\frac{n+1}{2n+1}\frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx} + \frac{n}{(2n+1)}\frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx} + \sum_t \Phi_n(x) = \sum_{s,n}\Phi_n(x)$$
$$(n = 0,1,\ldots,N). \tag{1.7}$$

Cele $(N+1)$ ecuații diferențiale de ordinul întîi la care a fost redusă ecuația integro-diferențială de transport conțin $(N+1)$ constante, care se determină prin folosirea condițiilor la margini și la interfețe privind continuitatea fluxurilor și curenților de neutroni la interfețe și anularea lor la marginea cu vidul :

$$\Phi_n^A(x) = \Phi_n^B(x) \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant +1, \tag{1.8}$$

$$\Phi(a,\mu) = 0 \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 0, \tag{1.9}$$

în care a este coordonata marginii cu vidul.

În continuare, aceste ecuații sînt rezolvate după metodele cunoscute din teoria clasică a transportului neutronilor. Particularitățile legate de aplicarea acestei metode în teoria transportului neutronilor sînt descrise amănunțit în lucrările de sinteză [D—1], [W—2] și vor fi presupuse cunoscute de cititori în expunerea paragrafelor și a capitolelor următoare.

Aproximația P_1, obținută în presupunerea că în dezvoltarea distribuției neutronice, doar primii doi termeni sînt diferiți de zero, este deosebit de utilă în calcule aproximative, deoarece conduce la așa-numita *ecuație a difuziei neutronilor*, care poate fi rezolvată analitic corect, în multe geometrii și situații fizice. Numeroase cazuri întîlnite în practică la proiectarea și la construirea reactorilor nucleari se încadrează în condițiile destul de restrictive impuse de aproximația de difuzie a transportului neutronilor.

1.1.1. Aproximația P_n iterat (P_n^*)

O îmbunătățire minoră a aproximației „clasice" a armonicilor sferice, care nu poate fi considerată o *nouă* aproximație în teoria transportului neutronilor, dar care prin rezultatele excelente la care a condus în numeroase probleme își găsește locul în această lucrare, o constituie metoda armonicilor sferice iterate [C—2] (de fapt iterația se referă la termenul-sursă dar această denumire improprie s-a încetățenit).

Această metodă constă într-un mod special de a lua în considerare termenul-sursă din ecuația de transport, propriu metodelor de aproximări succesive și se folosește în toate cazurile în care expresia analitică a sursei S (din ec. 13 de exemplu) nu este cunoscută.

În acest scop se consideră drept o primă aproximație a termenului-sursă chiar fluxul neutronic obținut ca soluție a ecuației de transport fără sursă. Introducînd această aproximare a sursei în ecuația de

transport, se determină iarăși fluxul de neutroni, obținîndu-se o valoare îmbunătățită. Aceasta este din nou considerată drept termen sursă în rezolvarea ecuației, ș.a.m.d. Cîteva astfel de iterații (2—3) sînt suficiente pentru a obține rezultate mai corecte decît cele clasice. În tabelul alăturat sînt prezentate comparativ valorile distanței de extrapolare liniară și ale primelor momente ale densității de neutroni, calculate în aproximația armonicilor sferice clasică (P_1) și iterată (P_1^*) și care sînt deosebit de concludente.

Întrucît această metodă se aplică oricărei aproximații polinomiale, în tabelă sînt indicate și valorile obținute în aproximația Cebîșev (T_n), pentru care metoda de iterație furnizează de asemenea rezultate mai bune (vezi § 1.3).

TABELA 1.1

c	cd				
	Exact	P_1	P_1^*	T_1	T_1^*
1,00	0,7104	0,5774	0,7113	0,7071	0,7071
0,80	0,7112	0,5019	$> P_1$	0,6153	0,6912
c	μ_{av}				
1,00	−0,5774	−0,5774	−0,5774	−0,4714	−0,5690
0,80	−0,6925	—	—	—	−0,6103
c	μ_{av}^2				
1,00	0,4102	0,3333	0,4107	0,3333	0,4024
0,80	0,4718	—	—	—	0,4499

1.1.2. Aproximația B_n

Afirmația din introducerea la acest capitol că se pot construi o infinitate de noi aproximații polinomiale prin schimbarea condițiilor de trunchiere va fi exemplificată în cazul aproximației B_n, care este de fapt tot aproximația polinomială a armonicilor sferice, dar la care se aplică o metodă diferită de trunchiere [H—1], [M—2].

Dezvoltarea polinomială a distribuției unghiulare a neutronilor este dată, ca de obicei, de

$$\Phi(x, u, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(x, u)\, P_n(\mu), \tag{1.10}$$

dar, în loc de a considera că toți termenii dezvoltării Φ_n sînt nuli pentru $n \geqslant (N+1)$ sau

$$\Phi_{N+1} = 0, \tag{1.11}$$

se consideră că și aceștia au un aport sensibil.

Pentru a putea lua în considerare și aportul acestora se consideră că aceeași ecuație de transport poate fi aproximată prin dezvoltarea în funcții Legendre de speța a II-a (Q_n) și că raportul a doi termeni consecutivi din cele două tipuri de dezvoltări este egal, adică

$$\frac{\Phi_{N+1}}{\Phi_N} = \frac{Q_{N+1}}{Q_N}. \tag{1.12}$$

Deci, în locul condiției (1.11), în aproximația B_n se ia în considerare condiția

$$\Phi_{N+1} = \Phi_N \frac{Q_{N+1}}{Q_N}, \tag{1.13}$$

care micșorează mult termenul de eroare a aproximației.

Trecînd de la dezvoltarea fluxului unghiular la cea a curentului de neutroni, se descoperă că de fapt condiția (1.13) este identică cu condiția (1.11), dar aplicată curentului:

$$J_{N+1} = 0. \tag{1.14}$$

Această nouă condiție de trunchiere are nu numai avantajul esențial de a micșora termenul de eroare, ci și pe acela, la fel de remarcabil, de a mări convergența dezvoltării respective, ceea ce se traduce printr-o micșorare a volumului de calcule.

De asemenea codurile folosite la mașinile electronice de calcul pentru aproximația armonicilor sferice se pot extinde cu multă ușurință pentru a include și calcule în aproximația B_n.

Folosind această aproximație B_n în calculul distribuțiilor fluxurilor neutronice și a probabilităților de scăpare a neutronilor, s-au obținut rezultate mai bune decît cele furnizate de aproximația P_n.

Pe lîngă aceasta, există și avantajul posibilităților de folosire în calculele B_n a codurilor deja existente pentru calcule P_n în majoritatea problemelor din teoria transportului neutronilor.

1.1.3. Aproximația G_N a armonicilor sferice*

Această aproximație generalizată sau îmbunătățită a dezvoltării în armonici sferice [P—1] se bazează pe o nouă metodă de trunchiere a sistemului de ecuații (1.7). Ea a fost sugerată de o lucrare privind transportul electronilor în semiconductori [B—1], în care sînt luate în considerare și cazurile de anizotropie a fluxului direcțional și pentru care se obțin rezultate mai bune decît prin aproximația clasică.

Generalizarea acestei metode la transportul neutronilor în cazul anizotrop a fost impusă de această constatare și de rezultatul binecunoscut că aproximația clasică a armonicilor sferice nu dă rezultate bune în cazul

* Notată de unii autori prin P_N^G.

Scanned with OKEN Scanner

anizotropiei. Astfel de probleme apar în special în calculul protecției și al fluxurilor de neutroni în canale, în care într-adevăr avem de-a face cu fluxuri direcționale pronunțate.

Demonstrația noii metode este efectuată în cazul ecuației de transport monoenergetică, independentă de timp și în geometrie plană, în care împrăștierea și sursele de neutroni sînt izotrope :

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu') \, d\mu' + \frac{S(x)}{2}, \qquad (1.15)$$

unde

x este coordonata plăcii în drumuri libere mijlocii,
μ — cosinusul unghiului între x și direcția neutronilor,
$\Phi(x, \mu)$ — fluxul direcțional,
c — numărul de neutroni secundari per ciocnire.

Metoda clasică constă în dezvoltarea fluxului direcțional în armonici sferice de forma

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(x) P_n(\mu), \qquad (1.16)$$

care transformă această ecuație integro-diferențială într-un sistem infinit de ecuații diferențiale.

În aproximația P_N, trunchierea acestei serii infinite se face impunînd condiția

$$\Phi_{N+1}(x) = 0. \qquad (1.17)$$

Pentru cazurile izotrope, acest N la care are loc trunchierea nu este prea mare (de obicei < 10) și nu apar deci dificultăți de calcul. În cazul anizotropiei, pentru o descriere cît mai corectă a fluxului direcțional este necesar să se rețină un număr cît mai mare de termeni în dezvoltare, deci un N mult mai mare, care conduce la calcule laborioase.

Noua metodă generalizată pornește de la constatarea că expresia fluxului direcțional nu este complet necunoscută înaintea rezolvării ecuației, deoarece calitativ se cunoaște ce formă trebuie să aibă ea aproape în fiecare problemă.

Folosind această expresie aproximativă pentru fluxul direcțional de neutroni, precum și expresia coeficienților dezvoltării (din care primii doi au sensuri fizice clare : [$\Phi_0(x)$ = fluxul total de neutroni, $\Phi_1(x)$ = = curentul], putem deduce o relație între coeficienții $\Phi_{N+1}(x)$ și $\Phi_{N-1}(x)$ care constituie deci o trunchiere naturală a dezvoltării în armonici sferice. Într-adevăr, dacă această relație este găsită, toți coeficienții dezvoltării pentru $n > (n+1)$ vor fi cunoscuți prin intermediul coeficientului $(n-1)$ din interiorul trunchierii (unde $n = 0,1,2, \ldots N$).

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd cazul anizotropiei maxime reprezentat printr-un fascicul orientat de neutroni, putem exprima acest flux direcțional printr-o funcție delta

$$\Phi(x, \mu) = f(x)\, \delta(1 - \mu), \tag{1.18}$$

care, introdusă în condiția de ortogonalitate a polinoamelor Legendre, furnizează relația necesară între $\Phi_{N+1}(x)$ și $\Phi_{N-1}(x)$:

$$\frac{\Phi_{N+1}(x)}{\Phi_{N-1}(x)} = \frac{P_{N+1}(1)}{P_{N+1}(1)} = 1. \tag{1.19}$$

Consecința acestei relații, cu repercursiuni favorabile mari asupra preciziei rezultatelor în cazul anizotropiei, constă în înlocuirea condiției clasice de trunchiere (1.17) prin noua condiție

$$\Phi_{N+1}(x) = \Phi_{N-1}(x). \tag{1.20}$$

S-ar putea considera la prima vedere că în cazul izotropiei fluxului această condiție este deosebit de nefavorabilă. În realitate, deoarece pentru fluxuri izotrope coeficienții dezvoltării scad rapid cu creșterea lui n, diferența dintre coeficienții consecutivi devine suficient de mică pentru a o putea considera nulă, ca în condiția (1.20).

Deci noua metodă de trunchiere în aproximația armonicilor sferice este valabilă simultan atît în cazul anizotrop, cît și în cel izotrop.

Sistemul de ecuații al acestei aproximații este format din primele n ecuații din (1.16) și din ecuația obținută prin introducerea condiției de trunchiere (1.20):

$$N \frac{d\Phi_{N-1}(x)}{dx} + (2N + 1)\, \Phi_N(x) + (N + 1) \frac{d(\alpha_N \Phi_{N+1}(x))}{dx} = 0, \tag{1.21}$$

cu

$$\alpha_N = \frac{\int_{-1}^{+1} P_{N+1}(\mu)\, \Phi_a(x, \mu)\, d\mu}{\int_{-1}^{+1} P_{N-1}(\mu)\, \Phi_a(x, \mu)\, d\mu} \tag{1.22}$$

Φ_a fiind fluxul direcțional furnizat în acest caz particular de (1.18).

Aplicații

Vom exemplifica noua metodă aplicînd-o la cazul izotropiei, al anizotropiei maxime și la aproximația asimptotică.

a) Cazul izotrop

Fluxul direcțional fiind exprimat prin

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2n+1}{2} \Phi_n(x) P_n(\mu), \tag{1.23}$$

rezultă prin introducerea expresiei lui în (1.22) că $\alpha_N = 0$ și deci aproximația generalizată și cea clasică a armonicilor sferice sînt identice.

b) Cazul anizotropiei maxime

Considerînd în acest caz fluxul direcțional într-un mediu ca fiind finit și identificînd de-a lungul lui o origine, îl putem exprima ca suma a două fascicule pornind din aceeași origine în direcții opuse, exprimate prin funcții delta de tipul (1.18)

$$\Phi_a(x, \mu) = A(x)\, \delta(1 + \mu) + B(x)\, \delta(1 - \mu). \tag{1.24}$$

Introducerea acestei expresii în (1.22) conduce la valoarea $\alpha_N = 1$, iar ecuația de trunchiere (1.19) devine

$$\frac{\mathrm{d}\, \Phi_{N-1}(x)}{\mathrm{d}x} + \Phi_N(x) = 0, \tag{1.25}$$

formînd împreună cu primele N ecuații (1.16) sistemul acestei aproximații. Avantajele folosirii expresiei (1.24) pentru fluxul direcțional în locul expresiei (1.18) sînt multiple:

— coeficienții spațiali independenți $A(x)$ și $B(x)$ se anulează în calculul lui α_n; în caz contrar (dacă în locul exprimării lui Φ_{N+1} prin Φ_{N-1} am fi folosit exprimarea lui prin valoarea lui α_n) ar depinde de raportul $A(x)/B(x)$, după cum rezultă din simpla înlocuire a expresiei alternative a lui Φ_a în (1.22);

— ecuația de transport relevă proprietăți binecunoscute de simetrie, pe care o expresie de tipul (1.24) le confirmă.

Pentru a rezolva sistemul de ecuații în noua aproximație, vom căuta soluții de forma

$$\Phi_n(x) = g_n\, \mathrm{e}^{\kappa x} \tag{1.26}$$

care, introduse în sistem, conduc la $(N+1)$ ecuații algebrice omogene pentru g_n. Soluția acestora poate fi găsită prin anularea determinantului sistemului

$$D^G = \begin{vmatrix} (1-c) & K & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ K & 3 & 2K\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K & 5\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots 2N-3 & (N-1)K & & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots(N-1)K & 2N-1 & & NK \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & (2N+1)K & 2N+1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.27)$$

În aproximația clasică a armonicilor sferice, determinantul D al sistemului este identic cu cel de mai sus, cu excepția ultimei linii, în care elementul $(2N+1)K$ este înlocuit prin NK.

Întrucît determinantul D^G al sistemului din aproximația generalizată poate fi exprimat în funcție de determinantul D al aproximației clasice prin relația

$$D^G = D - N(N+1)K^2 \cdot D_{N-2}, \qquad (N \geqslant 2) \qquad (1.28)$$

rezultă că proprietățile cunoscute [D—1) ale determinantului D se extind prin relația amintită și la determinantul D^G:

- pentru orice N și $c=0$, $K=1$ este o soluție a ecuației $D^G=0$;
- D^G este un polinom în K^2 de ordin $(N+1)/2$ pentru N impar și de ordin $N/2$ pentru N par;
- $K = \nu$ este o soluție a sistemului pentru $N \to \infty$, în care ν, inversa lungimii de atenuare asimptotică, este dat de

$$\frac{2\nu}{c} = \log\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right). \qquad (1.29)$$

Întrucît, determinantul este un polinom în K^2, soluțiile apar în perechi $(\pm|K|)$, ceea ce reprezintă tot o consecință a simetriei ecuației de transport al neutronilor.

Pentru calcule practice, aproximațiile P_1^G (în care am folosit notația evidentă

$$\Phi_0(x) = \Phi(x) \text{ și } \Phi_1(x) = J(x), \qquad (1.30)$$

deoarece Φ_0 și Φ_1 reprezintă fluxul total și curentul de neutroni) și P_3^G sînt exprimate

în P_1^G:

$$\frac{dJ(x)}{dx} + (1-c)\Phi(x) = S(x), \qquad (1.31)$$

$$J(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx}, \qquad (1.32)$$

cu soluția $K = \pm\sqrt{(1-c)}$;

în P_3^G :

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + (1-c)\,\Phi_0(x) = S(x), \tag{1.33}$$

$$\frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 3\Phi_1(x) + 2\frac{d\Phi_2(x)}{dx} = 0, \tag{1.34}$$

$$2\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + 5\,\Phi_2(x) + 3\frac{d\Phi_3(x)}{dx} = 0, \tag{1.35}$$

$$\frac{d\Phi_2(x)}{dx} + \Phi_3(x) = 0, \tag{1.36}$$

cu soluția dată de anularea determinantului sistemului :

$$3K^4 - [18 - 13c]\,K^2 + 15\,(1-c) = 0. \tag{1.37}$$

În tabela alăturată sînt comparate, pentru diverse valori ale lui c, valorile calculate ale lui K în aproximația clasică (P_3) și în cea generalizată (P_3^G), precum și valorile asimptotice exacte ν. Comparația indică rezultate mai apropiate de cele exacte pentru aproximația generalizată.

TABELA 1.2

c	K		ν
	P_3	P_3^G	
0,0	1,1613	1,0000	1,0000
0,1	1,1392	0,9907	1,0000
0,2	1,1126	0,9788	0,9999
0,3	1,0801	0,9632	0,9974
0,4	1,0398	0,9422	0,9856
0,5	0,9888	0,9129	0,9575
0,6	0,9226	0,8698	0,9073
0,7	0,8345	0,8040	0,8286
0,8	0,7119	0,6996	0,7104
0,9	0,5255	0,5236	0,5254
1,0	0	0	0

c) Cazul aproximației asimptotice

Fluxul direcțional se exprimă în acest caz (sub formă asimptotică) prin

$$\Phi_a(x,\mu) = \frac{A(x)}{1+\mu\nu} + \frac{B(x)}{1-\mu\nu}, \tag{1.38}$$

unde ν este dat de (1.29). Această expresie, introdusă în (1.22), conduce la

$$\alpha_N(\nu) = \frac{\int_{-1}^{+1} P_{N+1}(\mu)\left(\frac{1}{1+\mu\nu}\right)d\mu}{\int_{-1}^{+1} P_{N-1}(\mu)\left(\frac{1}{1+\mu\nu}\right)d\mu} \tag{1.39}$$

iar ecuația de trunchiere (1.19) ia forma

$$\frac{d}{dx}\left[(N+(N+1)\,\alpha_N(\nu))\,\Phi_{N-1}(x)\right] + (2N+1)\,\Phi_N(x) = 0. \tag{1.40}$$

Determinantul sistemului devine

$$D^{GA} = \begin{vmatrix} (1-c) & K & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K & 3 & 2K & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots 2N-3 & (N-1)K & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots (N-1)K & (2N-1) & NK & \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & [N+(N+1)\alpha_N(\nu)]K & (2N+1) & \end{vmatrix} = 0.$$

În aproximația P_1^{GA}, sistemul de ecuații se reduce la

$$\begin{aligned} &\frac{dJ(x)}{dx} + (1-c)\,\Phi(x) = S(x), \\ &J(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{(1-c)}{\nu^2}\,\Phi(x)\right], \end{aligned} \tag{1.41}$$

cu soluția $K = \pm\,\nu$, iar în aproximația P_3^{GA} același sistem devine

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + (1-c)\,\Phi_0(x) = S(x), \\ &\frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 3\Phi_1(x) + 2\frac{d\Phi_2(x)}{dx} = 0, \\ &2\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + 5\Phi_2(x) + 3\frac{d\Phi_3(x)}{dx} = 0, \\ &\frac{d}{dx}\left[(3+4\,\alpha_3(\nu))\,\Phi_2(x)\right] + 7\,\Phi_3(x) = 0, \end{aligned} \tag{1.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu soluțiile $K^2 = \nu^2$ și

$$K^2 = \frac{15\,(1-c)\,[3\,(1-c) - \nu^2]}{[15(1-c) - 4\nu^2(1-c) - 5\nu^2]}. \tag{1.43}$$

O comparație între valorile distanței liniare de extrapolare d (în problema Milne) în aceste diverse aproximații este de asemenea utilă pentru confirmarea preciziei mai bune a noii aproximații.

TABELA 1.3

c	d				
	P_1	P_1^{GA}	P_3	P_3^{GA}	exact
0	0,6667	1,0000	0,8757	1,0000	1,0000
0,1	0,6667	0,9670	—	—	1,0000
0,2	0,6667	—	—	—	—
0,3	0,6667	0,8862	—	—	0,9889
0,4	0,6667	—	—	—	—
0,5	0,6667	0,8043	0,8411	0,8875	0,9201
0,6	0,6667	—	—	—	—
0,7	0,6667	—	—	—	—
0,8	0,6667	—	—	—	—
0,9	0,6667	—	—	—	—
1,0	0,6667	0,6667	0,7051	0,7051	0,7104

Această metodă, ale cărei avantaje au fost demonstrate în cazul anizotrop, poate fi extinsă fără dificultăți la cazul dependent de timp și de energie și la alte geometrii decît cea plană.

O derivare riguroasă a aproximației generalizate a armonicilor sferice se obține [P—1] și prin dezvoltarea diferenței dintre fluxul direcțional aproximativ și cel real în armonici sferice, precum și prin folosirea unor reziduuri ponderate la determinarea coeficienților acestei dezvoltări.

1.1.4. Aproximația asimptotică (A_N)

O nouă metodă de trunchiere a sistemului infinit de ecuații diferențiale în care s-a transformat ecuația integro-diferențială de transport a neutronilor prin dezvoltarea în armonici sferice este cea [P—2] care se bazează pe polinoamele Legendre asociate și care are marele avantaj de a furniza comportarea asimptotică exactă a distribuțiilor neutronice în orice ordin de aproximare (orice N) și în orice fel de mediu (funcție de $c = \frac{\Sigma_s}{\Sigma}$).

Pentru a deduce această aproximație, este necesară, pe lîngă metoda diferită de trunchiere, și o formulare diferită a dezvoltării însăși.

Fluxul direcțional se dezvoltă în armonici sferice de forma

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [\Psi_n]_{U=1} \tag{1.44}$$

unde

$$\Psi_n = \frac{U^n}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} A_n^m \Phi_n^m(\mathbf{r}) Y_n^m(\Omega),$$

$$Y_n^m(\Omega) = P_n^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

θ = unghiul polar,

φ = unghiul azimutal;

Y_n^m sînt armonici sferice superficiale, definite prin intermediul polinoamelor Legendre asociate $P_n^m(x)$.

Noua dezvoltare (1.44) este introdusă în ecuația de transport staționară, monoenergetică, fără surse, cu împrăștiere izotropă, în geometrie generală :

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{c\Sigma}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, \Omega')\, d\Omega', \tag{1.45}$$

pe care o transformă într-un sistem infinit de ecuații diferențiale :

$$\begin{aligned}
&\nabla_U \nabla_r \psi_1 + \Sigma (1-c) \psi_0 = 0,\\
&\nabla_U \nabla_r \psi_2 + 3\Sigma \psi_1 + U \cdot \nabla_r \psi_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\nabla_U \nabla_r \psi_{n+1} + (2n+1)\Sigma \psi_n + (2n-1)\, U \cdot \nabla_r \psi_{n-1} - U^2 \nabla_U \nabla_r \psi_{n-1} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Acest sistem infinit devine finit printr-o trunchiere diferită de cea clasică ($\nabla_U \nabla_r \psi_{N+1} = 0$) și bazată pe presupunerea că unul dintre ultimii termeni (aici se ia în considerare termenul $N-1$) este diferit de zero și poate fi înlocuit prin el însuși, însumat cu o mică cantitate proporțională cu termenul de eroare ce ar fi apărut în cazul neglijării celorlalți termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte, se consideră că termenul ψ_{N-1} poate fi înlocuit cu $\left(\psi_{N-1} + \frac{N+1}{N}\alpha_N\right)$, unde

$$\alpha_N \equiv \frac{\int_{-1}^{+1} P_{N+1}(\mu)\left(\frac{1}{1+\mu\nu}\right)}{\int_{-1}^{+1} P_{N-1}(\mu)\left(\frac{1}{1+\mu\nu}\right)} \text{ și } \left(1 + \frac{N+1}{N}\alpha_N\right) \equiv \gamma. \qquad (1.47)$$

În cazul unui mediu caracterizat doar prin împrăștiere, această nouă aproximație (A_N) se reduce tot la cea clasică (P_N), deoarece $c = 1$, $\nu = 0$, $\gamma = 1$.

Scriind ecuația de transport (1.45) în aproximația de difuzie

$$\nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}) - K \sum\nolimits^2 \psi_0(\mathbf{r}) = 0 \qquad (1.48)$$

și aplicîndu-i pe rînd (pentru comparare) dezvoltarea în armonici sferice clasice (P_N) și cea bazată pe noua trunchiere și pe polinoamele Legendre asociate (A_N), se observă că în primul caz K va diferi de valoarea exactă ν dată de $\frac{2\nu}{c} = \log\frac{1+\nu}{1-\nu}$ cu atît mai mult cu cît N va fi mai mare și c mai diferit de unitate (vor fi egale doar pentru cazul împrăștierii izotrope în P_1), iar în al doilea caz cele două mărimi vor fi identice ($K = \nu$) pentru orice N și c.

Fizic, această proprietate remarcabilă se traduce printr-o comportare riguros asimptotică a fluxului scalar de neutroni în orice aproximație A_N și în orice mediu (c arbitrar).

Tot o aproximație de netrunchiere este și cea [W—2] în care nucleul integral de împrăștiere este dezvoltat într-un sistem de ecuații integrale (în variabila letargie), fără a mai fi astfel necesară vreo trunchiere a dezvoltării în armonici sferice. Acest sistem de ecuații integrale este rezolvat apoi prin metoda ciocnirilor multiple.

1.1.5. Aproximația P_∞ (fără trunchiere)

În această aproximație [N—1], se folosește de asemenea dezvoltarea clasică în armonici sferice, dar nu se mai recurge la trunchiere, care introduce erori cu atît mai mari cu cît gradul de anizotropie este mai mare.

Noutatea metodei constă în obținerea printr-o transformată Mellin față de variabila v și printr-o transformată Hankel față de variabila r a unor noi sisteme de ecuații mai simple din sistemele obținute prin dezvoltarea în armonici sferice a ecuației integro-diferențiale de transport.

Scanned with OKEN Scanner

Autorul formulează noua metodă de aproximare pentru ecuația de transport în geometrie sferică, în care reactorul sferic de rază $|\mathbf{r}|=b$ este înconjurat de un mediu absorbant infinit.

Ecuațiile de transport pentru cele două regiuni se scriu sub forma

$$v\Omega\cdot\nabla\,\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)+v\sum_t\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)=$$

$$=S(\mathbf{r},v\,\Omega)+\int_{4\pi}\int_0^\infty P_e(v'\,\Omega'\to v\,\Omega)\,v'\,\sigma_e\,\Phi(\mathbf{r},v'\,\Omega')\,dv'\,d\Omega' \qquad 0\leqslant|\mathbf{r}|\leqslant b, \quad (1.49)$$

$$\mathbf{v}\,\Omega\cdot\nabla\,\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)+\mathbf{v}\sum\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)=0 \qquad |\mathbf{r}|>b,$$

unde $\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)$ reprezintă numărul de neutroni din $\mathbf{r}$ care se deplasează cu viteza v în direcția Ω, iar $P_e(v\,\Omega'\to v\,\Omega)$ o funcție de probabilitate asociată cu împrăștierea elastică a neutronilor, care au o viteză inițială, $v'\,\Omega'$ și ajung prin acest proces la viteza finală $v\,\Omega$.

Condițiile la margine sînt cele obișnuite referitoare la continuitatea fluxului direcțional $\Phi(\mathbf{r},v\,\Omega)$ la suprafața sferei ($|\mathbf{r}|=b$) și cea de absență a unui aport neutronic din exterior $\Phi(b,v\,\Omega)=0$.

Folosind o dezvoltare clasică în armonici sferice de forma

$$\Phi(r,v,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi}\Phi_n(r,v)\,P_n(\mu), \qquad (1.50)$$

unde

$$\Phi_n(r,v)=2\pi\int_{-1}^{+1}\Phi(r,v,\mu)\,P_n(\mu)\,d\mu,$$

se obțin sistemele infinite de ecuații

$$nr^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^{n-1}}\Phi_{n-1}(r,v)\right]+(2n+1)\,\sigma_t\,\Phi_n(r,v)+$$

$$+\frac{n+1}{r^{n+2}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{n+2}\Phi_{n+1}(r,v)\right]=\frac{S}{4\,\pi r^2\,v_0}\,\delta_n^0\,\delta(r)\,\delta(v-v_0)+ \qquad (1.51)$$

$$+(2n+1)\,\sigma_e\,\frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma}\int_v\frac{1}{v'}\,P_n\left[\frac{1+\gamma}{2\gamma}\,\frac{v}{v'}-\frac{1-\gamma}{2\gamma}\,\frac{v'}{v}\right]\Phi_n(r,v')\,dv$$

pentru $0<r<b$, $n=0,1,2,\ldots,$ și

$$nr^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^{n-1}}\Phi_{n-1}(r,v)\right]+(2n+1)\,\sigma\,\Phi_n(r,v)+\frac{n+1}{r^{n+2}}\frac{\partial}{\partial r}[r^{n+2}\Phi_{n+1}(r,v)]=0 \qquad (1.52)$$

pentru $r>b$.

Se obțin transformatele Mellin (notate cu bară superioară) ale acestor sisteme de ecuații față de variabila energetică v prin

$$\overline{\Phi}_n(r, s) = \int_0^{v_0} \left(\frac{v}{v_0}\right)^s \Phi_n(r, v)\, dv, \tag{1.53}$$

iar acestea sînt, la rîndul lor, transformate Hankel față de variabila spațială r prin

$$H'_n(\lambda, s) = \int_0^b [\sqrt{r}\,\overline{\Phi}_n(r, s)]\, J_{n+1/2}(\lambda, r)\, r\, dr,$$

$$H''_n(\lambda, s) = \int_b^\infty [\sqrt{r}\,\overline{\Phi}_n(r, s)]\, J_{n+1/2}(\lambda, r)\, r\, dr, \tag{1.54}$$

$$H_n(\lambda, s) = H'_n(\lambda, s) + H''_n(\lambda, s);$$

$J_{n+1/2}$ este funcția Bessel de speța I și de ordin $n + 1/2$.

Sistemele (1.51) și 1.52) devin după aceste transformări

$$-n\lambda H'_{n-1}(\lambda, s) + b_n(s) H'_n(\lambda, s) + (n+1)\lambda H'_{n+1}(\lambda, s) =$$

$$= \frac{S}{4\pi v_0}\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\delta_n^0 - [n\overline{\Phi}_{n-1}(b, s) + (n+1)\overline{\Phi}_{n+1}(b, s)]\, b^{3/2} J_{n+1/2}(\lambda, b), \tag{1.55}$$

$$-n\lambda H''_{n-1}(\lambda, s) + (2n+1)\sigma H''_n(\lambda, s) + (n+1)\lambda H''_{n+1}(\lambda, s) =$$

$$= [n\overline{\Phi}_{n-1}(b, s) + (n+1)\overline{\Phi}_{n+1}(b, s)]\, b^{3/2} J_{n+1/2}(\lambda, b), \tag{1.56}$$

unde

$$b_n(s) = (2n+1)[\sigma_t - \sigma_s g_n(s)], \tag{1.57}$$

$$g_n(s) = \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma}\int_{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}^1 t^s P_n\left[\frac{1+\gamma}{2\gamma}\, t - \frac{1-\gamma}{2\gamma}\,\frac{1}{t}\right] dt =$$

$$= (1+\gamma)\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^s \left(\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right) \frac{n\,\Gamma\left(s+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(s-\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

$$\cdot\, {}_2F_1\left[s+\frac{n}{2}+1;\, -s+\frac{n}{2};\, n+\frac{3}{2};\, \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\right]. \tag{1.58}$$

pentru $\gamma \neq 1$, ${}_2F_1$ = funcția hipergeometrică.

Soluțiile acestor sisteme de ecuații transformate sînt, în presupunerea unei surse de forma $S = 4\pi v_0$

$$H'_n(\lambda, s) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} H'_{n,0}(\lambda, s) - \sum_{j=0}^{\infty} H'_{n,j}(\lambda, s)[j\overline{\Phi}_{n-1}(b, s) + (j+1)\overline{\Phi}_{j+1}(b, s)]\, b^{3/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, b), \tag{1.59}$$

$$H''_n(\lambda, s) = \sum_{j=0}^{\infty} H''_{n,j}(\lambda)[j\,\overline{\Phi}_{j-1}(b, s) + (j+1)\,\overline{\Phi}_{j+1}(b, s)]\, b^{3/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda, b),$$

unde $H'_{n,j}$ e dat de

$$-n\lambda H'_{n-1,j}(\lambda, s) + b_n(s) H'_{n,j}(\lambda, s) + (n+1)\lambda H'_{n+1,j}(\lambda, s) = \delta_j^n, \tag{1.60}$$

iar $H''_{n,j}(\lambda, s)$ satisface o relație identică, dar cu $b_n(s) = (2n+1)\sigma$. Deci pentru obținerea acestor soluții generale nu a mai fost necesară nici o metodă de trunchiere.

Sistemul de ecuații (1.60) se poate rezolva mai comod într-o formulare matriceală dată de

$$(I + \alpha\lambda B) H = E, \tag{1.61}$$

unde

$$B = B_{n,j} = -\frac{n}{\alpha b_n}\delta_{n-1}^j + \frac{n+1}{\alpha b_n}\delta_{n+1}^j,$$

$$E_{n,j} = \frac{1}{b_n}\delta_j^n\ ;\ H = H_{n,j}\ ;\ I = \delta_j^n.$$

Rezolvarea acestei ecuații matriceale printr-o dezvoltare obișnuită în serie a lui H este îngreuiată de o slabă convergență a dezvoltării. Această dificultate poate fi eliminată printr-o transformare a ecuației efectuată prin înmulțirea ei cu $(I - \alpha\lambda B)/(1 + \alpha^2\lambda^2)$, care conduce la noua ecuație

$$\left[I - \frac{\alpha^2\lambda^2}{1+\alpha^2\lambda^2}(I + B^2)\right] H = \frac{1}{1+\alpha^2\lambda^2}(I - \alpha\lambda B) E. \tag{1.62}$$

Soluția rapid convergentă pentru orice λ pozitiv a acestei ecuații matriceale este

$$H = \frac{1}{1+\alpha^2\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty} L^k (I - \alpha\lambda B) E \left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right)^k, \tag{1.63}$$

unde

$$L = I + B^2,$$

iar elementele matricei H sînt date de

$$H_{n,j}(\lambda) = \frac{1}{1+\alpha^2\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{b_j}\left[L^k_{n,j}+\alpha\lambda M^k_{n,j}\right]\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right)^k \tag{1.64}$$

cu notațiile și relațiile matriceale evidente :

$$M^k = -L^kB = -BL^k;\ L^0 = I;\ L^k_{n,j} = 0 \text{ (pentru } n+j \text{ impar)},$$

$$M^k_{n,j} = 0 \text{ (pentru } n+j \text{ par)}.$$

Tot din ecuația (1.60) se deduc și expresiile

$$H_{n,j}(\lambda) = \frac{(-1)^n\, C_n(\lambda)\, C_j(\lambda)}{n!\, j!\, \lambda^{n+j}}\left[H(\lambda) - \frac{B_n(\lambda)}{C_n(\lambda)}\right] \quad (j \leqslant n), \tag{1.65}$$

$$= \frac{(-1)^n\, C_n(\lambda)\, C_j(\lambda)}{n!\, j!\, \lambda^{n+j}}\left[H(\lambda) - \frac{B_j(\lambda)}{C_j(\lambda)}\right] \quad (j > n),$$

$$\begin{aligned}
\lambda H''_{n,j}(\lambda) &= X_{n,j} && (n \text{ par}, j \text{ par}),\\
&= 0 && (n \text{ par}, j \text{ impar} < n),\\
&= -X_{n,j} && (n \text{ par}, j \text{ impar} > n),\\
&= X_{n,j} && (n \text{ impar}, j \text{ par} < n),\\
&= 0 && (n \text{ impar}, j \text{ par} > n),\\
&= 0 && (n \text{ impar}, j \text{ impar}),
\end{aligned} \tag{1.66}$$

unde

$$X_{n,j} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)}. \tag{1.67}$$

Soluția astfel dedusă reprezintă funcția de distribuție a neutronilor, „ascunsă" sub forma neobișnuită a unei duble transformări (Mellin și Hankel), dar care înglobează și avantajul de a nu poseda un termen de eroare furnizat de vreo metodă de trunchiere.

Pentru a reveni la o expresie explicită a fluxului de neutroni se aplică soluției (1.63) o transformare inversă Hankel de forma

$$\sqrt{r}\,\bar{\Phi}_n(r, s) = \int_0^{\infty} H_n(\lambda, s)\, J_{n+1/2}(\lambda, r)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1.68}$$

care conduce la

$$\overline{\Phi}_n(r,s) = \mathcal{H}_n(r,s) + \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\Phi}_j(b,s)\, U_{n,j}(r,b) -$$

$$- \sum_{j=0}^{\infty} [j\,\overline{\Phi}_{j-1}(b,s) + (j+1)\,\overline{\Phi}_{j+1}(b,s)] \frac{b^{3/2}}{\sqrt{r}}\, W_{n,j}(r,b,s), \qquad (1.69)$$

unde

$$\mathcal{H}_n(r,s) = \frac{1}{b_0(s)} \sum_{k=0}^{\infty} [L^k_{n,0}(s)\, P_{n,k}(r) + M^k_{n,0}(s)\, Q_{n,k}(r)],$$

$$W_{n,j}(r,b,s) = \frac{1}{b_j(s)} \sum_{k=0}^{\infty} [L^k_{n,j}(s)\, R^k_{n,j}(r,b) + M^k_{n,j}(s)\, T_{n,j}(r,b)], \qquad (1.70)$$

care mai reprezintă încă doar efectul transformării Mellin.

Final această soluție se simplifică doar prin manipulări matriceale la

$$\overline{\Phi}_n(b,s) = \sum_{j=0}^{\infty} b\, W_{n,j}(b^-,b,s)\,[jH_{j-1}(b,s) + (j+1)\,H_{j+1}(b,s)]. \qquad (1.71)$$

Transformarea inversă Mellin a acestei soluții prezintă dificultăți datorită apariției unor integrări în spațiul complex, care pot fi evitate numai printr-o dezvoltare în polinoame ortogonale generale $\mathfrak{L}_m\left(\frac{v}{v_0}\right)$ și care conduce la expresia finală a distribuției neutronice :

$$\Phi_n(r,v) = v^{-\alpha}\, q(v/v_0) \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n,m}(r)\, \mathfrak{L}_m(v/v_0), \qquad (1.72)$$

unde $$\Phi_{n,m}(r) = \sum_{k=0}^{m} v_0^a\, A_{m,k}\, \overline{\Phi}_n(r, a+k),$$

iar $A_{m,k}$ sînt coeficienții lui $\left(\frac{v}{v_0}\right)^k$ din dezvoltarea polinomială $\mathfrak{L}_m\left(\frac{v}{v_0}\right)$.

1.1.6. Aproximația dublu P_n (Yvon)

O aproximație valoroasă a ecuației de transport în cazul unor discontinuități în distribuția fluxului unghiular (care apar frecvent în practică la orice suprafață de separație cu medii cu absorbție sau cu împrăștiere mare etc.) este cea a lui Yvon sau dublu P_n (notată și $P_n^{\pm}$).

În literatura de specialitate, această aproximație mai este întîlnită și sub denumirea de metoda polinoameler semispațiale, a armonicilor sferice duble sau a armonicilor semisferice (în cazul monodimensional).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul bidimensional sau tridimensional, ea se va numi metoda armonicilor sferice cvadruple, respectiv octuple, generalizîndu-se în n dimensiuni la metoda armonicilor 2^n —uple.

Întrucît în aproximația P_n apariția discontinuităților impune folosirea unor funcții în trepte a căror dezvoltare în polinoame Legendre cere un mare număr de termeni, calculele sînt mult îngreuiate. Metoda lui Yvon „elimină" aceste discontinuități, efectuînd dezvoltările în polinoame Legendre de o parte și de alta a lor (în cazul monodimensional). În felul acesta se obțin perechi de ecuații diferențiale cuplate de ordinul doi, analoge celor din aproximația bigrup de difuzie.

De asemenea, noua aproximație are o convergență mult mai bună decît aproximația clasică a armonicilor sferice, a cărei slabă convergență este recunoscută.

Astfel, în timp ce volumul de calcule necesare la utilizarea metodei $P_n^{\pm}$ este aproximativ egal cu cel de la metoda P_{2n} sau S_{2n}, precizia rezultatelor obținute este mai mare.

Într-un exemplu de calcul [Z—1], aproximația $P_2^{\pm}$ furnizează rezultate mai exacte decît aproximația P_5 în problema Milne cu împrăștiere izotropă și rezultate mai bune decît aproximația P_7 în aceeași problemă cu împrăștiere anizotropă.

Soluțiile asimptotice ale problemei Milne se obțin cu o eroare de 0,1% în $P_1^{\pm}$ și cu o eroare de 0,4% în aproximația P_5.

În locul dezvoltării prin polinoame Legendre, în această aproximație se ia

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, \Phi_n^+ P_n(2\mu - 1) \qquad 0 < \mu < 1,$$

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, \Phi_n^- P_n(2\mu + 1) \qquad -1 < \mu < 0, \tag{1.73}$$

unde

$$\Phi_n^+ = 2\pi \int_0^1 P_n(2\mu - 1)\, \Phi(x, \mu)\, d\mu,$$

$$\Phi_n^- = 2\pi \int_{-1}^0 P_n(2\mu + 1)\, \Phi(x, \mu)\, d\mu \tag{1.74}$$

sînt coeficienții dezvoltării, iar $P_n(2\mu \pm 1)$ sînt polinoamele Legendre de domeniul întreg.

Scanned with OKEN Scanner

Polinoamele de domeniu semiîntreg care definesc aproximația armonicilor sferice duble se deduc din acestea prin relațiile :

$$\begin{aligned} P_n^+(\mu) &= P_n(2\mu - 1) && \text{pentru} \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1, \\ &= 0 && \text{pentru} \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 0, \\ P_n^-(\mu) &= P_n(2\mu + 1) && \text{pentru} \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 0, \\ &= 0 && \text{pentru} \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Ele satisfac relația de ortogonalitate

$$\int_0^1 P_n^+(\mu)\, P_m^+(\mu)\, d\mu = \int_{-1}^0 P_n^-(\mu)\, P_m^-(\mu)\, d\mu = \frac{1}{(2n+1)}\, \delta_{n,m} \tag{1.76}$$

și relația de recurență

$$2(2n+1)\,\mu\, P_n^{\pm}(\mu) = (n+1)\, P_{n+1}^{\pm}(\mu) \pm (2n+1)\, P_n^{\pm}(\mu) + n\, P_{n+1}^{\pm}(\mu). \tag{1.77}$$

Fluxul și curentul de neutroni sînt date analog ca în aproximația armonicilor sferice întregi de expresiile

$$\Phi_0 = \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)\, d\mu = \Phi_0^+(x) + \Phi_0^-(x), \tag{1.78}$$

$$\Phi_1 = \int_{-1}^{+1} \mu\, \Phi(x, \mu)\, d\mu = \frac{\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x)}{2} + \frac{\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x)}{2}, \tag{1.79}$$

în timp ce pe semispațiile definite de discontinuitate ele sînt date de

$$\begin{aligned} \varphi_0^+ &= \int_0^1 \Phi^+\, d\mu, \\ \varphi_0^- &= \int_{-1}^0 \Phi^-\, d\mu. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Introducînd noile dezvoltări polinomiale în ecuația de transport, înmulțindu-le cu $P_m^{\pm}(\mu)$ și integrînd pe semispațiile care mărginesc discontinuitatea, se obțin după folosirea proprietăților de ortogonalitate și de recurență, două sisteme infinte de ecuații diferențiale care înlocuiesc ecuația integro-diferențială de transport inițială :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[n\, \Phi_{n-1}^{\pm} \pm (2n+1)\Phi_n^{\pm} + (n+1)\, \Phi_{n+1}^{\pm}\right] + \frac{2(2n+1)}{l}\, \Phi_n^{\pm} = \\ &= \frac{c}{l}(\Phi_0^+ + \Phi_0^-)\, \delta_{n,0} + 2(2n+1) \int^{\pm} S(\mu, x)\, P_n^{\pm}(\mu)\, d\mu, \end{aligned} \tag{1.81}$$

unde s-a notat $\int_0^1 = \int^+$ și $\int_{-1}^0 = \int^-$.

În cazul mediilor fără surse, întreg membrul drept se anulează. Este interesantă de dedus aproximația de ordin zero $P_0^{\pm}$, deoarece ea permite comparații cu aproximația de difuzie P_1.

Pentru $n = 0$ și sursă izotropă, sistemul de ecuații (1.81) se reduce la două ecuații:

$$\pm \frac{d}{dx}(\varphi_0^+ + \varphi_0^-)^{\pm} + \frac{2-c}{l}(\varphi_0^+ + \varphi_0^-)^{\pm} - \frac{c}{l}(\varphi_0^+ + \varphi_0^-) = 2S. \quad (1.82)$$

Adunînd și scăzînd aceste două ecuații și ținînd seama de definițiile (1.80), se obține final

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - \frac{4(1-c)}{l^2}\varphi_0 = -\frac{8}{l}S, \quad (1.83)$$

care reprezintă o „ecuație de difuzie" în aproximația armonicilor sferice duble. Față de aproximațiile de difuzie elementară sau transport (P_1), reprezentate prin ecuațiile

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\varphi_0 = -\frac{l}{L^2(1-c)}S \quad (1.84)$$

și respectiv,

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - \frac{3}{l^2}(1-c)\varphi_0 = -\frac{6}{l}S, \quad (1.85)$$

se observă diferențe atît în definirea „lungimii de difuzie", cît și a coeficientului termenului sursă.

Ecuația (1.83) furnizează rezultate mai bune în vecintatea discontinuității (sau sursei) pentru care aproximația de transport P_1 (ec. (1.85)) ar fi furnizat rezultatul eronat $\varphi = 0$.

În schimb, în regiunea asimptotică a soluției, adică pentru distanțe mari de la această discontinuitate sau sursă, rezultatele aproximației lui Yvon sînt mult mai slabe decît ale celorlalte aproximații. Aceasta se datorește presupunerii că dependența unghiulară a fluxului de neutroni este constantă în fiecare semispațiu pe care o implică noua aproximație.

Aproximația conține însă în ea posibilități proprii de îmbunătățire pentru a fi valabilă chiar în regiunea asimptotică a soluțiilor. În acest scop se recurge la cazul $n = 1$, care furnizează prin intermediul lui (1.81) ecuațiile $P_1^{\pm}$:

$$\frac{d^2\varphi_0^{\pm}}{dx^2} \pm \frac{3(4-c)}{2l}\frac{d\varphi_0^{\pm}}{dx} \mp \frac{3c}{2l}\frac{d\varphi_0^{\mp}}{dx} + \frac{3(2-c)}{l^2}\varphi_0^{\pm} - \frac{3c}{l^2}\varphi_0^{\mp} = \frac{6}{l}S. \quad (1.86)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca și în aproximația armonicilor sferice întregi, rezolvarea ecuațiilor obținute se efectuează în presupunerea că soluția este de forma

$$\Phi_n^{\pm}(x) = \sum_i A_{n,i}^{\pm} \, e^{\alpha_i \left(\frac{x}{\tau}\right)}, \tag{1.87}$$

în care α_i sînt valorile proprii ale ecuației, independente de condițiile la limită și analoge mărimilor k obținute în celelalte aproximații. În schimb, coeficienții $A_{n,i}^{\pm}$ sînt determiați din condițiile la limită.

Introducînd această soluție în ecuația (1.81), se obține pentru diverși n,

în aproximația $P_0^{\pm}$: $\alpha_1 = 2\,(1-c)^{1/2}$,

iar în $P_1^{\pm}$:

$$\alpha_1 = 6^{1/2}[(2-c) + (3 - 3\,c + c^2)^{1/2}]^{1/2}, \tag{1.88}$$

$$\alpha_2 = 6^{1/2}[(2-c) - (3-3\,c + c^2)^{1/2}]^{1/2},$$

Întrucît această aproximație este analogă cu transformarea celor $(2n + 1)$ ecuații cuplate din aproximația armonicilor sferice în alte $\frac{2n+1}{2}$ ecuații diferențiale, similare cu cele de difuzie la cîteva grupuri, rezultă avantajul remarcabil (în geometrie plană) de a putea folosi, la rezolvarea cu mașini de calcul a aproximațiilor P_n sau dublu P_n ($P_n^{\pm}$), codurile de difuzie deja existente bazate pe metode iterative.

Inițial, metoda a fost aplicată numai la geometrie plană, dar în lucrări mai recente ea a fost extinsă cu succes la geometriile sferică și cilindrică [D—4] și generalizată în cazul a două, trei sau n dimensiuni [S—1].

Tot în această lucrare este prezentată și o metodă de a reduce analitic orice probleme multidimensionale la cele monodimensionale.

Datorită avantajelor enumerate, aproximația armonicilor sferice duble a fost folosită de numeroși cercetători într-o mare varietate de probleme întîlnite în fizica reactorilor (în peste 30 de lucrări citate într-o bibliografie a teoriei și aproximațiilor transportului neutronilor [R—1]).

În cele ce urmează vor fi deduse ecuațiile aproximației $P_0^{\pm}$, care prezintă un interes deosebit datorită analogiei lor cu aproximația de difuzie.

La extinderea acestei aproximații la geometrii sferice sau cilindrice apar dificultăți analitice, legate de faptul că un produs de funcții ($Y.\delta$) care apare în ecuațiile de transport transformate nu mai este definit. Aceste funcții speciale, al căror produs este nedefinit chiar în cazul considerării lor drept distribuții în sensul lui Schwartz, sînt : funcția în trepte a lui Heaviside (Y) și funcția lui Dirac (δ).

Din fericire, o definiție recentă diferită a produsului unor distribuții, dată de Koenig, a depășit această dificultate [D—4].

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta s-a efectuat folosind armonici sferice duble F_i dependente numai de variabilele unghiulare de forma

$$\begin{aligned} F_1 &= (2\pi)^{-1/2} A, \\ F_2 &= (2\pi)^{-1/2} B, \\ F_3 &= \sin \vartheta \cos \Phi A, \\ F_4 &= \sin \vartheta \cos \Phi B, \end{aligned} \tag{1.89}$$

unde A și B sînt exprimați prin funcția Heaviside în trepte (Y)

$$\begin{aligned} A &= Y_{-\pi/2} - Y_{\pi/2}, \\ B &= Y_{\pi/2} - Y_{3\pi/2}, \end{aligned} \tag{1.90}$$

adică $A = 1$ pentru $-\pi/2 < \Phi < \pi/2$,

$= 0$ pentru celelalte domenii,

$B = 1$ pentru $\pi/2 < \Phi < 3\pi/2$,

$= 0$ pentru celelalte domenii.

În timp ce nucleul integral de împrăștiere al ecuației de transport este dezvoltat în armonici sferice obișnuite, reținîndu-se în aproximația împrăștierii izotrope doar primul termen, fluxul direcțional $\varphi(r, \vartheta, \Phi)$ este dezvoltat în armonicile sferice duble F_i sub forma

$$\varphi(r, \vartheta, \Phi) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i(r) F_i(\vartheta, \Phi). \tag{1.91}$$

Introducînd aceste dezvoltări în ecuația de transport, apar produsele ($Y.\delta$) amintite, iar ecuația se transformă în sistemul (de exemplu în aproximația dublu P_1)

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{P}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{P}{r}(\varphi_3+\varphi_4) + 2\Sigma_a(\varphi_1+\varphi_2) = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1+\varphi_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_3-\varphi_4) + \frac{4P}{\sqrt{3}\,r}(\varphi_3-\varphi_4) + 2\Sigma(\varphi_1-\varphi_2) = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1+\varphi_2) + \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_3-\varphi_4) - \frac{3P}{\sqrt{3}\,r}(\varphi_3-\varphi_4) + \frac{6}{\sqrt{3}}\Sigma(\varphi_3+\varphi_4) = 0, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_3+\varphi_4) - \frac{3P}{r}(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{6P}{\sqrt{3}\,\mathrm{r}}(\varphi_3+\varphi_4) + \\ &\qquad + \frac{6}{\sqrt{3}}\Sigma(\varphi_3-\varphi_4) = 0, \end{aligned} \tag{1.92}$$

în care $P = 0$ (plăci), $P = 1$ (cilindri), $P = 2$ (sfere).

În această dezvoltare, fluxul Φ și curentul J de neutroni sînt reprezentate de

$$\Phi = \sqrt{2}\,\pi\,(\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$J = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left[(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\varphi_3 + \varphi_4)\right]. \tag{1.93}$$

O aproximație analogă celei de difuzie se obține și în acest caz, de exemplu în geometrie cilindrică, pentru $P = 1$ și $h_1 = g_1 = 0$ și ea constituie aproximația dublu P_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{P}{r}(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\,\Sigma_a\,(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1 + \varphi_2) + 2\,\Sigma\,(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \tag{1.94}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{3P}{r}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

cu soluțiile

$$(\varphi_1 + \varphi_2) = \left[a\,I_0\,(2\sqrt{\Sigma\Sigma_a}\,r) + b\,K_0\,(2\sqrt{\Sigma\Sigma_a}\,r)\right],$$
$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{2\Sigma}\left[a\,I_1\,(2\sqrt{\Sigma\Sigma_a}\,r) + b\,K_1\,(2\sqrt{\Sigma\Sigma_a}\,r)\right]. \tag{1.95}$$

O trecere în revistă a tuturor lucrărilor apărute în literatura de specialitate și cuprinzînd aplicațiile metodei armonicilor sferice duble (Yvon) în teoria transportului neutronilor este inclusă în bibliografia generală [R—1] (vezi Subject index : „Double spherical harmonics approximations").

1.1.7 Aproximația polinomială a necorelării

Îmbunătățiri substanțiale ale metodelor de aproximare a soluției ecuației de transport al neutronilor se pot obține nu numai prin alegerea dezvoltărilor polinomiale optime (vezi §§1.2 și 1.3) sau a metodelor de trunchiere a acestor dezvoltări (§§1.1.3—1.1.6), ci și printr-o tratare adecvată doar a transformatei Laplace a funcției de împrăștiere $f\,(\mu_0, u - u')$

din ecuația de transport [M—1]. Considerînd că aceasta este dată cu suficientă precizie de o expresie de forma

$$\begin{aligned} f(\mu, u) &= 2\mu\, e^{-u} \qquad \text{pentru } \mu > 0, \\ &= 0 \qquad\qquad \text{pentru } \mu < 0, \end{aligned} \tag{1.96}$$

care conduce, pentru primele momente ale transformatei funcției de împrăștiere, la expresiile

$$\bar{f}_0 = (s+1)^{-1}; \qquad \bar{f}_1 = \frac{2}{3}(s+1)^{-1}, \tag{1.97}$$

se obține aproximația necorelării. Denumirea acesteia provine de la faptul că distribuțiile unghiulară și energetică ale neutronilor nu mai sînt legate între ele (sînt necorelate), deoarece raportul $\bar{f}_1/\bar{f}_0$ nu mai depinde de s.

În cadrul acestei aproximații se obține pentru distribuția neutronică expresia

$$\Phi_0(x=0, u) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{u}{6}}\left[I_0\left(\frac{u}{6}\right) + I_1\left(\frac{u}{6}\right)\right], \; u \neq 0, \tag{1.98}$$

care reprezintă, după cum se vede și din figura 1.1, cea mai apropiată valoare față de cea riguros exactă. În regiunea valorilor mari ale letargiei u,

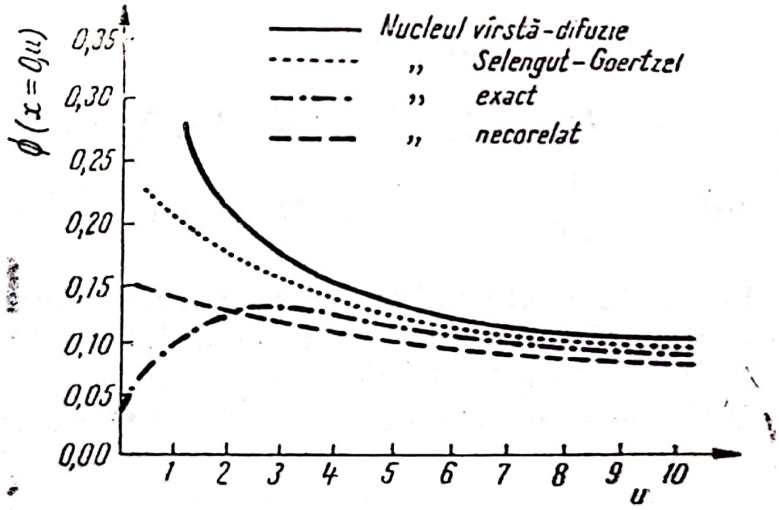


Fig. 1.1

distribuția neutronilor, furnizată de aproximația necorelării, se depărtează sensibil de rezultatul exact, păstrînd însă alura asimptotică corectă. Se observă că aproximația necorelării este mai bună și decît aproximația Goertzel — Selengut. Intrucît această comparație este dată în figură numai pentru punctul $x=0$, este utilă și o comparație a „vîrstei" neutro-

nilor valabilă pe tot domeniul lui x, pentru care aproximația necorelării furnizează expresia

$$\tau = \frac{\overline{x}^2}{2} = u + \mathrm{O} + \mathrm{O}\,(\mathrm{e}^{-u/3}) \tag{1.99}$$

Comparînd-o cu expresia exactă $\tau = \frac{\overline{x}^2}{2} = u + \frac{2}{3} + \mathrm{O}\,(\mathrm{e}^{-u/3})$ și cu cea furnizată de aproximația Goertzel-Selengut, $\tau = \frac{\overline{x}^2}{2} = u + 2$, se observă iarăși o superioritate a aproximației necorelării.

O aproximație care furnizează valoarea asimptotică riguros exactă a vîrstei neutronilor s-a obținut prin folosirea în ecuația de transport a unui nucleu de împrăștiere complex, format dintr-o componentă dată de aproximația necorelării în proporție de 2/3 și o componentă dată de aproximația Goertzel-Selengut în proporție de 1/3.

Într-un mediu general cu hidrogen și cu împrăștiant infinit greu, fluxul de neutroni în aproximația necorelării (1.98) devine, prin folosirea acestui nucleu cu componente,

$$\Phi_0\,(x=0,\,u) = \frac{m}{2}\,\mathrm{e}^{-mu}\,[I_0\,(m,\,u) + I_1\,(m,\,u)]\left[\frac{\Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_0}{\Sigma_H + \Sigma_a}\right]^{1/2} \tag{1.100}$$

unde
$$m = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\frac{2}{3}\Sigma_H}{\Sigma_T - \bar{\mu}\Sigma_0} - \frac{\Sigma_a}{\Sigma_H + \Sigma_a}\right],$$

$$n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\frac{2}{3}\Sigma_H}{\Sigma_T - \bar{\mu}\Sigma_0} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_H + \Sigma_a}\right],$$

$$\Sigma_T = \Sigma_H + \Sigma_a + \Sigma_0,$$

$$u \neq 0.$$

1.1.8. Aproximațiile armonicilor sferice pare (P_{2n})

În majoritatea covîrșitoare a aplicațiilor aproximației armonicilor sferice (P_n) la rezolvarea ecuației de transport pentru neutroni s-a recurs la aproximația impară (P_{2n-1}) a acesteia, datorită anumitor avantaje esențiale pe care ea le are față de aproximația armonicilor sferice pare (P_{2n}). În ultimii ani însă au apărut o serie de lucrări [C—1], [D—3], [M—3], [M—4], [M—5] în care se demonstrează că tocmai aceste dezavantaje

ale aproximației pare în cazurile generale se dovedesc a fi folositoare în anumite cazuri particulare.

Înainte de a le expune, să urmărim mai de aproape avantajele și dezavantajele care au impus pînă nu demult folosirea doar a armonicilor sferice impare.

Aproximația P_n este caracterizată de trunchierea

$$\Phi_{n+1} = 0, \tag{1.101}$$

conform căreia armonica sferică de ordin maxim luată în considerare este Φ_n. Sistemul de ecuații devine finit, conținînd numai $(n+1)$ ecuații cu $(n+1)$ necunoscute $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ pentru n impar.

Dacă se consideră că soluția acestui sistem este de forma

$$\Phi_n(x) = g_n e^{\nu x/l} \qquad (n = 0, 1, \ldots, N) \tag{1.102}$$

(unde g_n = const.), ν vor fi soluțiile sistemului transformat cu condiția de compatibilitate ca determinantul coeficienților să se anuleze. Aceste rădăcini ν_i sînt, pentru orice N, reale și diferite pentru $c < 1$; pentru $c > 1$, două rădăcini sînt imaginare (celelalte reale și diferite), iar pentru $c = 1$ două rădăcini sînt egale cu zero [D—1].

În aproximația impară P_{2n-1}, aceste rădăcini sînt în număr de $2n$, ca și cel al armonicilor sferice reținute și deci al ecuațiilor sistemului. Compatibilitatea pe care o conferă acest fapt sistemului de ecuații elimină necesitatea de a mai introduce noi ecuații pentru rezolvarea sistemului.

În aproximația pară, numărul de rădăcini este mai mic decît numărul armonicilor sferice și deci al ecuațiilor reținute.

De asemenea, condiția de continuitate la interfețe a soluției $\Phi_n(x)$ a sistemului trunchiat trebuie să fie satisfăcută pentru orice $n = 0,1,\ldots,N$ deci într-o aproximație impară există $(N+1)$ astfel de condiții care pot fi satisfăcute de cele $(N+1)$ rădăcini (soluții). În aproximația pară, numărul de rădăcini este mai mic cu o unitate față de numărul condițiilor de continuitate, ceea ce conduce de asemenea la dificultăți în soluționarea finală a ecuației de transport.

Aceste avantaje pe care le au armonicile sferice impare sînt anihilate în multe probleme (anizotropii mari, absorbții mari, dimensiuni foarte mici) de slaba convergență și de necesitatea de a folosi un mare număr de termeni ai dezvoltărilor.

Luarea în considerare și a armonicilor sferice pare are însă, printre altele, avantajul de a îmbunătății substanțial convergența dezvoltărilor și de a conduce la rezultate mai apropiate de cele exacte [M—5]. Un exemplu [C—1] aplicat determinării razei critice a unui reactor sferic va fi concludent: într-o lucrare dedicată studiului convergenței dezvoltării în armonici sferice, Davison [D—2] demonstrează că această rază critică este dată de

$$R = \frac{2(2L+3)^2 R_L + (2L+5)^2 R_{L+1}}{2(2L+3)^2 + (2L+5)^2} \text{ (L impar)}, \tag{1.103}$$

în funcție deci de valorile ei în aproximațiile L (impară) și $L+1$ (pară).

Folosind condiții la margine de tip Mark sau Marshak, ori mediu infinit „negru" (absorbant absolut), se obțin rezultatele din tabela alăturată.

TABELA 1.4

Eroarea procentuală în determinarea razei critice a unui reactor sferic în diverse aproximații P_n

P_n	Eroarea %		
	Condiții Marshak	Condiții Mark	Mediu infinit „negru"
P_1	1,654	3,033	3,661
P_2	0,590	−0,568	−1,116
P_3	0,074	0,142	0,261
P_4	0,016	−0,150	−0,289
P_5	0,029	0,050	0,098
P_6	0,008	−0,062	−0,137
P_7	0,015	0,023	0,052
P_8	0,004	−0,032	−0,080

Se observă din aceste date o precizie constant mai mare pentru rezultatele P_{2n} față de cele P_{2n-1}.

Un alt autor [M−4] a demonstrat că se obține o aproximare și mai bună a rezultatelor, în special la calculul factorilor de dezavantaj, comparativ cu ambele aproximații P_{2n} și P_{2n-1}, prin simpla lor mediere, adică $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ sau $\frac{1}{2}(P_3 + P_4)$ etc. (vezi fig. 1.2*a*).

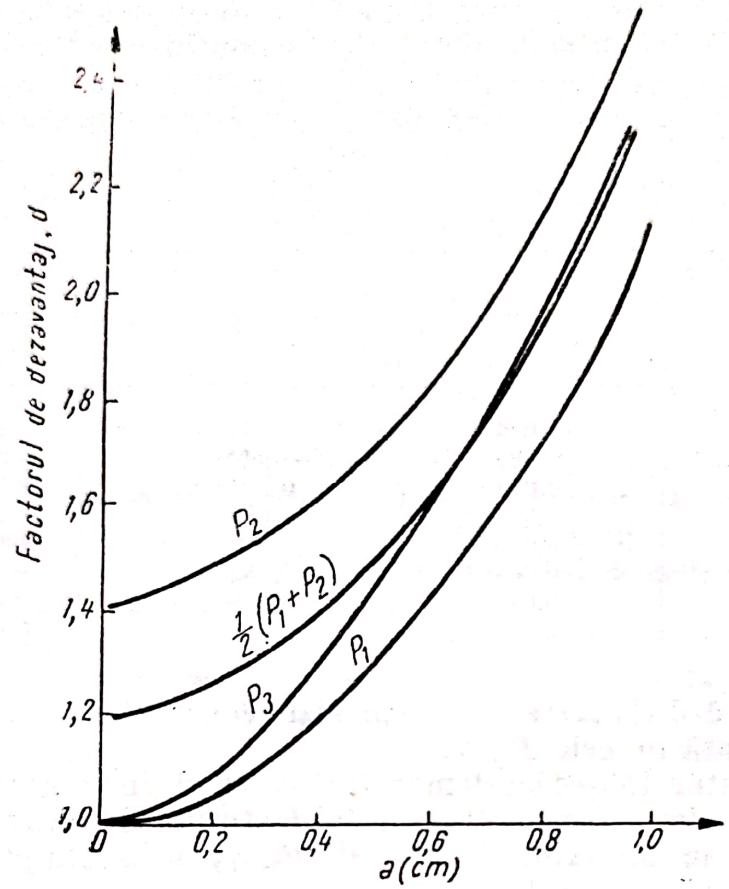
Dezvoltînd această idee, Dawson [D−3] folosește o interpolare variabilă între cele două rezultate (P_{2n} și P_{2n-1}) prin intermediul unui parametru α pentru a determina proporția optimă ce trebuie luată din fiecare rezultat spre a obține o valoare cît mai apropiată de cea exactă. Pentru $\alpha=1$ se obțin rezultatele P_2, iar pentru $\alpha = \infty$ cele pentru P_1.

Pentru determinarea fluxului neutronic într-o rețea U−H_2O, autorul găsește că pentru $\alpha = 2{,}4$ (care înmulțește valoarea P_2) se obține un rezultat foarte apropiat de cel „exact", dat de aproximația dublu $P_5(P_5^{\pm})$ (vezi fig. 1, 2*b*).

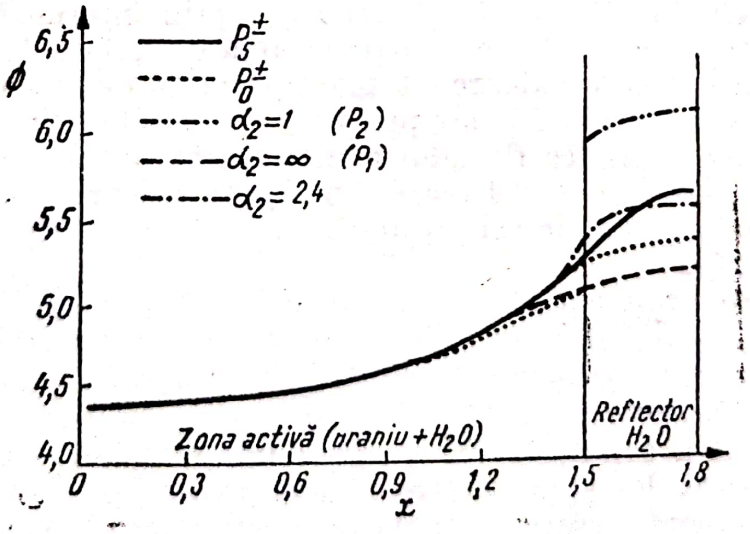
Avantajul principal al acestor aproximații ale armonicilor sferice pare, așa cum rezultă din lucrările citate, constă în posibilitatea obținerii unor rezultate cu o precizie comparabilă cu cea dată de P_n impar cu n mare, dar cu un efort de calcul mai mic.

O extensie a condițiilor la margine necesare în aproximațiile P_2 și P_4 pentru folosirea lor în geometrie cilindrică este dată în [M−6], în timp ce un grup de lucrări tratînd amănunțit aproximațiile pare în geometrie plană, cilindrică sau sferică, în numeroase probleme de fizică a reactorilor, sînt incluse în lucrarea [M−3].

Scanned with OKEN Scanner


Factorul de dezavantaj, d
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
a (cm)
P2
½(P1+P2)
P3
P1

a


φ
6,5
6,0
5,5
5,0
4,5
4,0
0
0,3
0,6
0,9
1,2
1,5
1,8
x
$P_S^{\pm}$
$P_0^{\pm}$
$\alpha_2=1$ (P_2)
$\alpha_2=\infty$ (P_1)
$\alpha_2=2,4$
Zona activă (uraniu + H_2O)
Reflector H_2O

b

Fig. 1.2

1.2. Aproximația polinoamelor Jacobi-Gegenbauer

Aproximația polinomială a dezvoltării în armonici sferice a componentei unghiulare a ecuației lui Boltzmann, a cunoscut succese deosebite în rezolvarea ecuației de transport al neutronilor prin eliminarea variabilei unghiulare în special datorită proprietăților de ortogonalitate ale polinoamelor respective (Legendre).

Aceste succese s-au datorat și posibilității de a obține, în principiu, precizii oricît de bune ale soluțiilor prin simpla mărire a ordinului de aproximare (P_n), adică a numărului de termeni reținuți în dezvoltarea polinomială a funcțiilor de distribuție sau de împrăștiere ale neutronilor.

În realitate însă, creșterea ordinului de aproximare este însoțită de o creștere mult mai rapidă a dificultăților matematice și a volumului de calcule, care devin prohibitive chiar pentru cele mai perfecționate mașini electronice de calcul. De asemenea slaba convergență a aproximației armonicilor sferice și dificultățile pe care aceasta le întîlnește la tratarea împrăștierii anizotrope, a regiunilor mici și de margine sau a celor cu absorbție mare au condus la necesitatea găsirii unor noi aproximații polinomiale care să depășească aceste dificultăți.

Atenția cercetătorilor [P—1], [N—], [N—2], [M—1], [Z—1] s-a îndreptat în mod natural în această situație spre polinoamele Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}(\mu)$ ($\alpha > -1$; $\beta > -1$), care reprezintă o generalizare atît a polinoamelor Legendre, cît și a polinoamelor Cebîșev (vezi § 1.3) și care prezintă aceleași remarcabile proprietăți de ortogonalitate. În cazul $\alpha = \beta = \delta$, polinoamele Jacobi se reduc la polinoamele Gegenbauer $P_n^{\delta\delta}(\mu)$. Polinoamele Jacobi-Gegenbauer se reduc, la rîndul lor, la cele Legendre pentru $\alpha = \beta = \delta = 0$ și la polinoame Cebîșev pentru $\alpha = \beta = \delta = -\frac{1}{2}$, dar caracterul lor de generalitate este evident, deoarece perechea de parametri α și β pot lua orice valori.

Prin definiție, polinoamele Jacobi-Gegenbauer sînt date de

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}],\ \alpha=\beta=\delta, \tag{1.104}$$

cu condiția de normare

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{1.105}$$

și cu relația de recurență utilă

$$(2n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)\,P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) =$$
$$=(2n+\alpha+\beta+1)\,[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)\,x+(\alpha^2-\beta^2)]\,P_n^{\alpha,\beta}(x)+$$
$$+2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)\,P_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \qquad (n\geqslant 1). \tag{1.106}$$

Această relație este valabilă și pentru $n=0$ dacă se consideră $P_{-1}^{\alpha,\beta}(x)=0$.

Numite de unii cercetători și polinoame ultrasferice, polinoamele Jacobi-Gegenbauer mai sînt definite în acest caz prin relația

$$C_n^{\nu}(\mu)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)}\cdot\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}\right)}(\mu)=$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+2\delta+1)}{\Gamma(2\delta+1)}\,\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(n+\delta+1)}P_n^{\delta,\delta}(\mu),$$

unde
$$\nu=\delta+\frac{1}{2}.$$

Relația de ortogonalitate a polinoamelor Jacobi-Gegenbauer este dată de

$$\int_{-1}^{+1}P_n^{\alpha,\beta}(x)\,P_m^{\alpha,\beta}(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx=$$
$$=\frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\cdot\delta_{nm}, \tag{1.107}$$

care demonstrează că domeniul de ortogonalitate al acestor polinoame este $(-1\leqslant x\leqslant+1)$, în care ele formează un sistem complet de funcții. Variabila x este reprezentată în teoria transportului de variabila unghiulară μ (în geometria plană).

După cum se știe, metoda de trunchiere a unei dezvoltări polinomiale definește un termen de eroare proporțional cu valoarea termenilor neglijați. Acest termen de eroare al dezvoltării* este destul de mare la aproximația polinoamelor Legendre (afară de cazul absorbției nule sau foarte mici), dar se demonstrează că el este mai mic la orice altă aproximație polinomială cu $\delta\leqslant 0$. De asemenea eroarea este distribuită diferit de-a lungul domeniului de ortogonalitate în fiecare aproximație polinomială, datorită prezenței unor funcții de ponderare diferite.

* Vezi nota de la pag. 30.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, în timp ce la polinoamele Legendre funcția de ponderare este unitatea, care conduce la obținerea unei erori medii minime, la polinoamele Jacobi-Gegenbauer această funcție de ponderare $(1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta}$ conduce la un termen de eroare care crește de la margine spre centrul domeniului de ortogonalitate (invers ca pentru polinoamele Legendre) și furnizează deci rezultate optime tocmai la margine.

Avantajul aproximației armonicilor sferice de a conduce la o eroare minimă mediată pe întreg domeniul este în mare parte anulat de faptul că această eroare nu este uniformă pe acest domeniu, ci crește mult la marginile domeniului unghiular, adică chiar în regiunea de cel mai mare interes în cazul absorbțiilor puternice și al împrăștierii anizotrope.

Generalizarea aproximației polinomiale prin folosirea polinoamelor $P_n^{\alpha,\beta}$ este avantajoasă și pentru că permite alegerea arbitrară a parametrilor α și β, astfel ca anumite rezultate să fie cît mai apropiate de cele exacte [P—1].

Noua aproximație a fost de curînd introdusă în studiul transportului neutronilor, fiind aplicată la rezolvarea ecuației Boltzmann monodimensională și monoenergetică [N—1], la obținerea unei soluții asimptotice a aceleiași ecuații [P—1], la calculul distanței de extrapolare liniară [P—1], la calculul distribuțiilor fluxului și a curentului de neutroni și la determinarea criticității unui mediu (reactor) multiplicator plan nereflectat [M—1].

O particularitate importantă a noii aproximații Jacobi-Gegenbauer este aceea că ecuațiile obținute nu conțin implicit condiția fizică de conservare a neutronilor. Pentru eliminarea acestei deficiențe este găsită [P—1] o metodă modificată care să mențină totuși avantajele aproximației Jacobi-Gegenbauer.

Pentru expunerea noii metode de aproximație ne vom limita la cazul mai simplu al ecuației de transport monodimensionale (reactor placă nereflectat) monoenergetice cu împrăștiere izotropă, independentă de timp și fără surse:

$$\mu \frac{\partial \varphi(x,\mu)}{\partial x} + \Sigma\, \varphi(x,\mu) = \frac{\Sigma c}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(x,\mu')\, d\mu', \qquad (1.108)$$

în care, ca de obicei, $\varphi(x,\mu)$ este distribuția unghiulară a neutronilor, x coordonata exprimată în unități de drum liber mijlociu al neutronilor, iar c numărul de neutroni secundari pe ciocnire.

Se dezvoltă funcția de distribuție unghiulară în polinoame Jacobi-Gegenbauer sub forma cunoscută de la metoda armonicilor sferice:

$$\varphi(x,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} \varphi_n(x)\, P_n^{\alpha,\beta}(\mu). \qquad (1.109)$$

Deoarece prin integrarea pe variabila unghiulară a funcției de distribuție a neutronilor se obține densitatea lor, iar prin integrarea acele-

iași funcții, după înmulțirea prealabilă cu μ, se obține curentul de neutroni, vom avea și în aproximația Jacobi-Gegenbauer satisfăcute relațiile

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{+1} \varphi(x, \mu)\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{h_n}\right) \varphi_n(x),$$
$$J(x) = \int_{-1}^{+1} \varphi(x, \mu)\, \mu\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_n}{h_n}\right) \varphi_n(x), \tag{1.110}$$

în care

$$h_n \equiv \int_{-1}^{+1} (1-\mu)^{\alpha} (1+\mu)^{\beta} [P_n^{\alpha,\beta}(\mu)]^2\, d\mu,$$
$$a_n \equiv \int_{-1}^{+1} P_n^{\alpha,\beta}(\mu)\, d\mu\,; \quad b_n \equiv \int_{-1}^{+1} P_n^{\alpha,\beta}(\mu)\, \mu\, d\mu.$$

Introducînd dezvoltarea (1.109) în ecuația de transport și ținînd seama de relațiile de recurență și de ortogonalitate, aceasta devine

$$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} -$$
$$- \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{d\varphi_n(x)}{dx} +$$
$$+ \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx} + \Sigma\varphi_n(x) =$$
$$= \frac{\Sigma_c}{2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{h_0}{h_m}\right) \varphi_m(x) \quad (0 \leqslant n \leqslant \infty). \tag{1.111}$$

Printr-o transformare de forma

$$\varphi_n(x) \equiv g_n\, e^{\nu \Sigma x} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.112}$$

ecuația (1.111) devine

$$\left[1 - c - \frac{\nu(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)}\right] g_0 + \left[\frac{2\nu}{(\alpha+\beta+2)} - \frac{c}{2} \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+3)}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right] g_1 -$$
$$- \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{c\, a_m}{2}\right) \left(\frac{h_0}{h_m}\right) g_m = 0, \tag{1.113}$$
$$\left[\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)\nu}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}\right] g_{n+1} + \left[1 - \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\nu}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}\right] g_n +$$
$$+ \left[\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)\nu}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}\right] g_{n-1} = 0 \qquad (1 \leqslant n \leqslant \infty),$$

care reprezintă un sistem infinit de ecuații algebrice a cărei soluție nebanală este furnizată de condiția anulării determinantului D al sistemului. În practică, dezvoltarea Jacobi-Gegenbauer este trunchiată la termenul φ_N, ceea ce permite exprimarea matematică a condiției de mai sus sub forma determinantului primelor $(n+1)$ ecuații :

$$D_N = 0. \tag{1.114}$$

Luînd în dezvoltare doar 2, 4,... termeni, se obțin aproximațiile $P_1^{\alpha,\beta}$, $P_3^{\alpha,\beta}$, ..., analoge aproximațiilor P_1 P_3, ... din cazul metodei armonicilor sferice.

Soluțiile sistemului (1.113) sînt date în fiecare caz de

$$D_0 = (1-c) - \frac{\nu(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)},$$

$$D_1 = (1-c) - \frac{2(1-c)(\alpha-\beta)\nu}{(\alpha+\beta+4)} - \nu^2\left[\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)}\right], \tag{1.115}$$

. . . . . .

$$D_N = \left[1 - \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\nu}{(\alpha+\beta+2N)(\alpha+\beta+2N+2)}\right]D_{N-1} -$$

$$- \nu^2\left[\frac{4N(\alpha+\beta+N)(\alpha+N)(\beta+N)}{(\alpha+\beta+2N-1)(\alpha+\beta+2N)^2(\alpha+\beta+2N+1)}\right]D_{N-2} +$$

$$+ (-1)^N \nu^N c\, a_N \prod_{k=1}^{N}\left[\frac{k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)}\right].$$

Aceste condiții se simplifică dacă se ține seama că pentru polinoamele Jacobi-Gegenbauer $\alpha = \beta = \delta$ și în acest caz vom avea :

$$D_0 = (1-c),$$

$$D_1 = (1-c) - \nu^2\left[\frac{1}{2\delta+3}\right],$$

. . . . . (1.116)

$$D_N = D_{N-1} - \nu^2\left[\frac{N(2\delta+N)}{(2\delta+2N-1)(2\delta+2N+1)}\right]D_{N-2} +$$

$$+ \nu^N c\, a_N \prod_{k=1}^{N}\left[\frac{k(2\delta+k)}{(2\delta+2k-1)(2\delta+2k)}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Din aceleași motive, și ecuația (1.113) se reduce la

$$\frac{(n+1)(n+2\delta+1)}{(2n+2\delta+1)(n+\delta+1)}\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx}+\frac{(n+\delta)}{(2n+2\delta+1)}\frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx}+$$

$$+\Sigma\varphi_n(x)=\frac{\Sigma_c}{2}\delta_{n0}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\left(\frac{h_0}{h_m}\right)\varphi_m(x);\qquad(0\leqslant n\leqslant\infty).\quad(1.117)$$

Este demn de remarcat că pentru $\delta\to\infty$ dezvoltarea în polinoame Jacobi-Gegenbauer a funcției de distribuție a neutronilor se transformă automat într-o dezvoltare în serie Taylor în jurul lui $\mu=0$.

O abordare diferită a acestei probleme [N—1] pornește de la faptul că orice soluție generală a ecuației Boltzmann liniare (1.108) este reprezentată de o suprapunere de soluții parțiale de forma

$$\varphi(x,\mu)=\sum_j A_j\,\varphi_j(x,\mu),\qquad(1.118)$$

în care coeficienții A_j se deduc din condițiile la margine.

În loc de a introduce direct dezvoltările Jacobi-Gegenbauer în ecuația (1.108), în noua variantă se separă cele două variabile din (1.118) sub forma :

$$\varphi(x,\mu)=\Phi_\lambda(\mu)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),\qquad(1.119)$$

diferită de (1.109) care transformă ecuația (1.108) în

$$(\lambda-\mu)\,\Phi_\lambda(\mu)=\frac{c\lambda}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi_\lambda(\mu')\,d\mu'.\qquad(1.120)$$

În această nouă formă a ecuației (1.108) cu variabilele separate, se introduce acum dezvoltarea Jacobi-Gegenbauer a funcției de o singură variabilă $\Phi_\lambda(\mu)$:

$$\Phi_\lambda(\mu)=\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{h_l}P_l^{\alpha,\beta}\,g_l^{\alpha,\beta}(\lambda),\qquad(1.121)$$

unde

$$g_l^{\alpha,\beta}(\lambda)=\frac{1}{F_N(\lambda)}\left\{\left[1+c\lambda\sum_{m=0}^{N}\frac{a_m}{h_m}W_{m-1}^{\alpha,\beta}(\lambda)\right]P_l^{\alpha,\beta}(\lambda)-c\lambda\,F_N(\lambda)\,W_{l-1}^{\alpha,\beta}(\lambda)\right\}.\qquad(1.122)$$

Noua expresie a dezvoltării este remarcabilă, deoarece permite deducerea ecuației caracteristice a reactorului sub forma

$$P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\lambda) - c\lambda\, V^{\alpha,\beta}_{N}(\lambda) = 0, \qquad \text{unde } l = N+1 \text{ și} \tag{1.123}$$

$$V^{\alpha,\beta}_{N}(\lambda) = \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m}{h_m}\{P^{\alpha,\beta}_{m}(\lambda) W^{\alpha,\beta}_{N}(\lambda) - P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\lambda)\, W^{\alpha,\beta}_{m-1}(\lambda)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\lambda) - P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\mu)}{\lambda - \mu}\, d\mu,$$

ale cărei rădăcini, satisfăcînd condiția $\lambda = \lambda_j$, conduc la simplificarea ecuației (1.121):

$$\Phi_\lambda(\mu) = \frac{c\lambda_j}{2}\frac{1}{\lambda_j - \mu}\left[1 - \frac{P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\mu)}{P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\lambda_j)}\right]. \tag{1.124}$$

În toate deducerile precedente am păstrat pentru generalitate notația $P^{\alpha,\beta}_{n}(\mu)$ a polinoamelor Jacobi, știind însă că în orice moment expresiile deduse sînt valabile și pentru polinoamele Jacobi-Gegenbauer cu condiția $\alpha = \beta = \delta$ $(\delta > -1)$.

Soluția finală pentru distribuția unghiulară a neutronilor în noua variantă se obține ușor, introducînd (1.124) în (1.119):

$$\varphi(x, \mu) = \frac{c\lambda_j}{2}\frac{1}{\lambda_j - \mu}\left[1 - \frac{P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\mu)}{P^{\alpha,\beta}_{N+1}(\lambda_j)}\right]\exp\left(-\frac{x}{\lambda_j}\right). \tag{1.125}$$

Pentru $\alpha = \beta = 0$ se obțin soluțiile clasice furnizate de aproximația polinoamelor Legendre.

Revenind la formularea dată în lucrarea [P — 1] aproximației polinoamelor Jacobi-Gegenbauer, se demonstrează existența unei „aproximații elementare a difuziei" $P^{\delta,\delta}_{1}(\mu)$ și a condițiilor în care ea satisface conservarea neutronilor, reprezentînd o adevărată lege de difuzie a lui Fick.

Păstrînd, ca și în aproximația armonicilor sferice, numai primii doi termeni în dezvoltarea Jacobi-Gegenbauer, se obțin (din ec. (1.117)) „ecuațiile de difuzie"

$$\left(\frac{1}{\delta+1}\right)\frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \Sigma\,\varphi_0(x) = \Sigma\, c\,\varphi_0(x),$$
$$\left(\frac{1+\delta}{3+2\delta}\right)\frac{d\varphi_0(x)}{dx} + \Sigma\varphi_1(x) = 0. \tag{1.126}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuații iau o formă mult mai apropiată de cea a ecuațiilor de difuzie clasice dacă se înlocuiesc funcțiile matematice φ_1 și φ_0 prin funcțiile cu sens fizic $\Phi(x)$ și $J(x)$, date de ecuația (1.110):

$$\frac{dJ(x)}{dx} + \frac{2\delta + 3}{3}(1 - c)\Sigma\Phi(x) = 0, \tag{1.127}$$

$$J(x) = -\frac{1}{3\Sigma}\frac{d\Phi(x)}{dx} = -D\frac{d\Phi(x)}{dx}. \tag{1.127'}$$

Din ultima ecuație, care reprezintă legea lui Fick de difuzie în aproximația Jacobi-Gegenbauer, rezultă că coeficientul de difuzie D este independent de aproximația polinomială folosită la rezolvarea ecuației de transport.

În schimb, din ecuația (1.127) se trage concluzia importantă că pentru δ oarecare ea nu reprezintă o ecuație de continuitate care să traducă matematic faptul fizic al conservării neutronilor. Doar pentru valoarea $\delta = 0$, care reprezintă aproximația polinoamelor Legendre, ecuația (1.127) devine o ecuație de continuitate, ceea ce constituie o concluzie banală.

Pentru ca și în cazul $\delta \neq 0$, adică și pentru aproximația polinoamelor Jacobi-Gegenbauer, să avem satisfăcută o ecuație de continuitate, folosim o variantă modificată a dezvoltării respective.

Înainte de a deduce această modificare, se rezolvă ecuațiile (1.127) și (1.127'), considerînd soluția de forma $e^{\nu\Sigma x}$, care conduce la valorile proprii

$$\nu^2 = (2\delta + 3)(1 - c). \tag{1.128}$$

Aceste valori proprii, furnizate de o aproximație care nu conservă neutronii, trebuie să fie identice cu cele furnizate de aproximațiile care conservă neutroni și dintre care cea mai cunoscută este cea de transport; valorile proprii sînt date în această aproximație de

$$\frac{2\nu}{c} = \log\frac{1 + \nu}{1 - \nu}. \tag{1.129}$$

Din egalarea celor două expresii se obține valoarea lui δ pentru care aproximația de „difuzie Jacobi-Gegenbauer" satisface condiția de continuitate. Ca rezultat se obține o foarte bună concordanță între valorile anumitor mărimi din fizica reactorilor calculate în această aproximație și cele exacte. Pentru exemplificare a fost calculată distanța de extrapolare liniară d, dată în această aproximație de expresia

$$d \equiv \left[\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]^{-1}_{x=\text{margine}} = \left[\frac{2^{2\delta+1}\,\Gamma^2(\delta + 2)}{(1 + \delta)(2\delta + 3)\,\Gamma(2\delta + 2)}\right] l, \tag{1.130}$$

unde $l = \lambda_{tr}$, care a fost comparată $[P - 1]$ cu valorile aceleiași mărimi, calculate în aproximația de transport (P_1) a difuziei, și cu cele exacte (vezi tabela 1.5).

TABELA 1.5

c	$\frac{d}{l}$ (P_1 Jacobi)	$\frac{d}{l}$ (exact)	$\frac{d}{l}$ (P_1 Legendre)	δ	ν^2
0	1,0000	1,0000	0,6667	−1,0000	1,0000
0,2	0,9307	0,9993	0,6667	−0,8751	0,9998
0,4	0,8505	0,9606	0,6667	−0,6905	0,9714
0,6	0,7766	0,8750	0,6667	−0,4709	0,8232
0,8	0,7162	0,7871	0,6667	−0,2383	0,5047
1,0	0,6667	0,7104	0,6667	0,0000	0,0000
1,2	0,6254	0,6459	0,6667	0,2411	−0,6965
1,4	0,5914	0,5916	0,6667	0,4839	−1,5871
1,6	0,5616	0,5457	0,6667	0,7277	−2,6732
1,8	0,5350	0,5063	0,6667	0,9721	−3,9554
2,0	0,5132	0,4723	0,6667	1,2171	−5,4341

Pentru deducerea modificării aproximației Jacobi-Gegenbauer care să asigure conservarea neutronilor, revenim la soluțiile (1.109) (1.110), obținute prin metoda nemodificată. În acel caz se înmulțea sistemul de n ecuații de transport Jacobi-Gegenbauer cu $(1 - \mu)^{\delta} P_n^{\delta\delta}(\mu)$ și se integra fiecare ecuație pe μ.

În metoda modificată înmulțim cu aceeași mărime toate cele N ecuații ale sistemului afară de prima, care se integrează direct, menținîndu-și astfel calitatea de a reprezenta o ecuație de continuitate (o lege de difuzie Fick).

În locul sistemului (1.111) din aproximația nemodificată se va obține

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{b_n}{h_n}\right)\varphi_n(x) + (1-c)\sum\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_n}{h_n}\right)\varphi_n(x) = 0,\right. \tag{1.131}$$

$$\frac{(n+1)(n+2\delta+1)}{(2n+2\delta+1)(n+\delta+1)}\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} + \frac{(n+\delta)}{(2n+2\delta+1)}\frac{d\varphi_{n-1}(x)}{dx} +$$

$$+ \sum\varphi_n(x) = 0 \quad (1 \ll n \ll N),$$

care constituie sistemul de ecuații ale aproximației Jacobi-Gegenbauer modificate M_N^{δ}.

Calculînd în această aproximație modificată $M_3^{-1/2}$ distanța de extrapolare liniară în problema Milne (cu $c = 1$), se obține $d = 0{,}7095\ l$, adică o valoare diferită de cea exactă ($0{,}7104\ l$) cu numai 0,13%, față de 0,75% în aproximația P_3 și 0,35% în aproximația T_3 (vezi § 1.3),

Scanned with OKEN Scanner

Şi valorile proprii exacte ale aproximaţiei de transport asimptotice (1.129) sînt obţinute, în aproximaţia Jacobi-Gegenbauer modificată, cu erori mai mici decît în aproximaţiile P_3 şi T_3.

Folosind aceeaşi dezvoltare polinomială Jacobi-Gegenbauer, alţi autori [M — 1] calculează condiţia de criticitate a unui mediu multiplicator, alegînd pentru α şi β valori care asigură identitatea distanţei de extrapolare d din problema Milne, rezolvată prin metoda S_n, cu aceeaşi mărime obţinută prin metoda Jacobi.

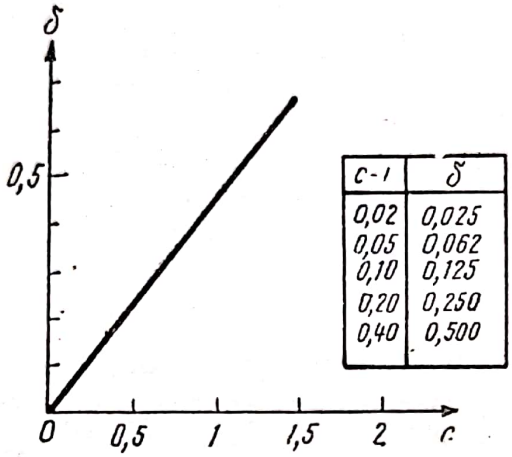


Fig. 1.3

Din curba $\delta = f(c)$ se observă că doar pentru c apropiat de unitate (adică pentru grosimi foarte mari de material) polinoamele Legendre reprezintă o aproximare optimă, furnizînd valoarea cea mai apropiată de cea exactă.

1.3. Aproximaţia polinoamelor Cebîşev

În paragraful precedent, dedicat generalizării aproximaţiei polinomiale prin utilizarea polinoamelor Jacobi-Gegenbauer, s-a arătat că avantajele acestora se păstrează şi în cazul $\alpha = \beta = \delta = -1/2$, care corespunde polinoamelor Cebîşev T_n de speţa I (sau de speţa a II-a pentru $\delta = 1/2$).

În special faptul că funcţia de ponderare a acestor polinoame, $(1 - \mu^2)^{-1/2}$, distribuie uniform termenul de eroare pe întreg domeniul variabilei unghiulare, conduce la o mai corectă reprezentare a distribuţiei unghiulare a neutronilor în reactor şi la cea mai mică deviaţie maximă faţă de valoarea exactă. Proprietatea amintită a termenului de eroare face ca rezultatele obţinute prin aproximaţia polinoamelor Cebîşev să fie mai bune în special pentru absorbanţi puternici, pentru care aproximaţia armonicilor sferice este mai slabă.

Scanned with OKEN Scanner

Această aproximație a fost folosită de numeroși cercetători la rezolvarea ecuației de transport pentru obținerea distribuțiilor neutronice [A — 1], la calculul distanței de extrapolare [A — 1], [C — 1], [Y — 1], la studiul protecției contra radiațiilor gamma [S — 1], la problema Milne [A — 1], [C — 1], [Y — 1] și la calculul criticității unui reactor [Y — 1]. Este remarcabil faptul că folosirea acestor polinoame conduce de asemenea la aproximații T_1 analoge celei a difuziei elementare, dar cu rezultate mai bune.

Printre dezavantajele actuale ale acestei metode de aproximare se numără faptul că nu a putut fi aplicată la probleme cu mai mult de o singură variabilă unghiulară și nici la geometriile sferică și cilindrică.

Prin definiție, polinoamele Cebîșev (de speța I) sînt de forma

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \tag{1.132}$$

cu relația de ortogonalitate

$$\int_{-1}^{+1} T_n(\mu)\, T_m(\mu)\,(1-\mu^2)^{-1/2}\,d\mu = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi & m = n = 0, \\ \pi/2 & m = n \neq 0, \end{cases} \tag{1.133}$$

în care funcția de ponderare este

$$(1-\mu^2)^{-1/2}, \tag{1.134}$$

și cu relația de recurență

$$T_{n+1}(\mu) + T_{n-1}(\mu) = 2\,\mu\, T_n(\mu) \qquad (-1 \leqslant \mu \leqslant +1). \tag{1.135}$$

Expresiile explicite ale primelor polinoame Cebîșev sînt deci

$$\begin{aligned} T_0(\mu) &= 1, \\ T_1(\mu) &= \mu, \\ T_2(\mu) &= 2\,\mu^2 - 1, \\ T_3(\mu) &= 4\,\mu^3 - 3\,\mu, \\ T_4(\mu) &= 8\,\mu^4 - 8\,\mu^2 + 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1.136}$$

În cele ce urmează se va aplica metoda de aproximare prin polinoame Cebîșev la ecuația de transport (1.108), la care se va lua în considerare și sursa [A — 1].

Se dezvoltă atît funcția de distribuție unghiulară a neutronilor, cît și sursa în polinoame Cebîșev sub forma

$$\begin{aligned} \varphi(x,\mu) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\pi}\,\varphi_0(x)\,T_0(\mu) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\,T_n(\mu)\right], \\ S(x,\mu) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\pi}\,S_0(x)\,T_0(\mu) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n(x)\,T_n(\mu)\right]. \end{aligned} \tag{1.137}$$

Scanned with OKEN Scanner

După introducerea acestor dezvoltări în ecuația (1.108) și după înmulțirea cu $T_m(\mu)(1-\mu^2)^{-1/2}$ a noilor ecuații astfel obținute pentru a putea folosi relația de ortogonalitate, se obține, prin integrare de la -1 la $+1$, un sistem infinit de ecuații diferențiale cuplate:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-c)}{l}\varphi_0(x)+\varphi_1'(x)+\frac{2c}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2n}(x)}{4n^2-1}=S_0(x),\\
&\varphi_0'(x)+\frac{2}{l}\varphi_1(x)+\varphi_2'(x)=S_1(x),\\
&\varphi_1'(x)+\frac{2}{l}\varphi_2(x)+\varphi_3'(x)=S_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{k-1}'(x)+\frac{2}{l}\varphi_k(x)+\varphi_{k+1}'(x)=S_k(x),
\end{aligned}\tag{1.138}$$

în care s-a considerat că variabila x nu este exprimată în unități de drum liber mijlociu l (ca în ecuația (1.108).

Considerînd, ca și în cazul aproximației Jacobi-Gegenbauer (ec. (1.112)), o soluție de forma

$$\varphi_n(x)=g_n(\nu)\exp(\nu\Sigma_S)=g_n(\nu)\exp\left(\nu\frac{x}{l}\right),\tag{1.139}$$

sistemul (1.138) se transformă în

$$\begin{aligned}
&(1-c)g_0+\nu g_1+2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{2n}}{4n^2-1}=0,\\
&\nu g_0+2g_1+\nu g_2=0,\\
&\nu g_1+2g_2+\nu g_3=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\nu g_{k-1}+2g_k+\nu g_{k+1}=0,
\end{aligned}\tag{1.140}$$

în care pentru simplitate s-a neglijat iarăși termenul sursă.

Trunchierea dezvoltării polinomiale la termenul N transformă sistemul infinit de ecuații (1.140) într-un sistem finit, a cărui soluție nebanală este obținută prin anularea determinantului său caracteristic.

Scanned with OKEN Scanner

În aproximația „de difuzie" Cebîșev (T_1), adică prin luarea în considerare în dezvoltare, doar a primilor doi termeni, sistemul (1.140) se reduce la ecuațiile „de difuzie" Cebîșev

$$\begin{aligned} \frac{(1-c)}{l}\varphi_0(x) + \varphi_1'(x) &= 0, \\ \varphi_0'(x) + \frac{2}{l}\varphi_1(x) &= 0 \end{aligned} \tag{1.141}$$

sau, prin eliminarea lui $\varphi_1(x)$,

$$\varphi_0''(x) - \frac{2(1-c)}{l^2}\varphi_0(x) = 0. \tag{1.142}$$

Pentru ca această ecuație să fie analogă cu cea de difuzie (P_1) din aproximația armonicilor sferice, este necesar ca mărimea $[2(1-c)/l^2]$ să reprezinte o lungime de difuzie

$$\begin{aligned} L_T^{-2} &= \frac{2(1-c)}{l^2}, \\ \varphi_0'' - \frac{1}{L_T^2}\varphi_0(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.143}$$

Această expresie a lungimii de difuzie este diferită atît de cea caracteristică aproximației de difuzie (P_1), în care

$$L_{P_1}^{-2} = \frac{3(1-c)}{l^2}, \tag{1.144}$$

cît și de cea exactă (de transport), dată de ecuația

$$\frac{1}{c} = \frac{L_{\text{exact}}}{2l}\log\frac{L_{\text{exact}}+l}{L_{\text{exact}}-l}, \tag{1.145}$$

ceea ce indică fără dubiu că aproximația T_1 nu satisface legea de difuzie a lui Fick și deci se poate profita de avantajele ei amintite mai sus numai printr-o aplicare foarte circumspectă.

Astfel, la determinarea distanței de extrapolare liniară d (în problema Milne fără absorbție), aproximația T_1 este mai slabă decît P_1, în timp ce aproximația T_3 este net superioară (vezi tabela 1.6):

$$d_{T_3} \equiv \frac{\pi l}{4}\frac{69\,\nu_1^2 + 30\,\pi\nu_1 - 20}{64\,\nu_1^2 + 35\,\pi\nu_1}. \tag{1.146}$$

Scanned with OKEN Scanner

TABELA 1.6

	Exact	P_1	T_1	P_3	T_3
d/l	0,71045	0,6670	0,7851	0,7051	0,7131

În cazul problemei Milne cu absorbție [C — 1], același calcul aplicat distanței de extrapolare liniară a scos în evidență avantajele aproximației Cebîșev la absorbții mari ($c > 0{,}5$) și la anizotropii pronunțate ale distribuției unghiulare a neutronilor, adică tocmai în domeniile în care aproximația armonicilor sferice era net dezavantajată (de necesitatea unui mare număr de termeni în dezvoltare, de convergență slabă, de creșterea termenului de eroare, etc.).

Rezultatele din tabela 1.7 sînt concludente, indicînd o precizie mai bună de 1% pentru aproximația T_N.

TABELA 1.7

	c	cd (Exact)	cd					
			P_1	T_1	P_3	T_3	P_5	T_5
împrăștiant pur	1,00	0,7104	0,5774	0,7071	0,6940	0,6942	0,7039	0,7021
mixt	0,50	0,7204	0,3598	0,4407	0,5976	0,6635	0,6487	0,7145
mixt	0,10	0,8590	0,1107	0,1355	0,2025	0,2307	0,2470	0,2784
absorbant pur	0,00	1,0000	0,0000	0	0	0	0	0

O utilizare sistematică și aprofundată a aproximației polinoamelor Cebîșev la determinarea condițiilor de criticitate ale unui reactor nuclear și la rezolvarea problemei Milne (distanța de extrapolare liniară), care ajunge la concluzii tot atît de favorabile privind avantajele noii metode, este oferită și de lucrarea [Y — 1], în care se determină atît valorile proprii ale ecuației de transport Cebîșev, cît și proprietățile matematice ale constantelor de atenuare ale distribuției neutronice.

Determinarea acestora din urmă prezintă un deosebit interes teoretic și practic în aproximația multigrupală de transport, în care nu există încă un criteriu de a distinge matematic un sistem pur absorbant neutronic de unul absorbant multiplicator. În această direcție există o afirmație nedemonstrată în Davison [D — 1] după care un sistem neutronic este multiplicator dacă cel puțin o pereche din aceste constante de atenuare este imaginară.

Aproximația Cebîșev în formularea din lucrarea citată ar putea constitui o bază sigură pentru o astfel de demonstrație.

Scanned with OKEN Scanner

1.4. Alte aproximații polinomiale

Toate metodele de aproximație prin dezvoltări polinomiale descrise în paragrafele precedente se bazează, printre altele, pe avantajele pe care le conferă proprietățile de ortogonalitate ale polinoamelor respective. Pentru ca rezolvarea ecuației de transport prin aceste polinoame să fie utilă, este necesar însă ca și convergența lor să fie suficient de rapidă.

Pe lîngă aproximațiile descrise mai sus, se mai pot imagina teoretic o infinitate de alte polinoame ortogonale prin simpla schimbare fie a limitelor de integrare, fie a funcției de ponderare și care să prezinte o convergență rapidă pentru rezolvarea diverselor situații întîlnite practic în fizica reactorilor. Dintre acestea sînt expuse succint în continuare cîteva aproximații polinomiale care au fost folosite de specialiști.

Aproximația polinoamelor Hermite

Are la bază dezvoltarea funcțiilor caracteristice ale reactorului din ecuația de transport în polinoame Hermite, date de expresia

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \tag{1.147}$$

cu relația de ortogonalitate

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi}\, n! & m = n, \end{cases} \tag{1.148}$$

în care e^{-x^2} este funcția de ponderare în domeniul $[-\infty, +\infty]$, și cu relația de recurență

$$H_{n+1} - 2x H_n + 2n H_{n-1} = 0. \tag{1.149}$$

Primele polinoame Hermite sînt

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1.150}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aproximația polinoamelor Laguerre

Aceste polinoame sînt definite prin relația

$$LA_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), \tag{1.151}$$

cu funcția de ponderare e^{-x} în domeniul $(0, \infty)$, cu relația de ortogonalitate

$$\int_0^\infty LA_m(x)\,LA_n(x)\,e^{-x}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n \end{cases} \tag{1.152}$$

și cu relația de recurență

$$(n+1)\,LA_{n+1} - (2n+1-x)\,LA_n + n\,LA_{n-1} = 0. \tag{1.153}$$

Primele polinoame Laguerre sînt

$$\begin{aligned} LA_0(x) &= 1, \\ LA_1(x) &= 1 - x, \\ LA_2(x) &= 2(1-x) + \frac{x^2}{2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1.154}$$

Acestea au fost folosite în fizica reactorilor la studiul proprietăților de transport al gazelor și al amestecurilor de gaze [D — 1], la efectele de transport în experiențele cu unde neutronice [J — 1], la analiza teoretică a experiențelor cu surse pulsate de neutroni [P — 1], [V — 1], la determinarea distribuției fluxului de neutroni termici în medii cu discontinuități de temperatură [K — 1], la studiul răcirii prin difuzie a neutronilor în reactori omogeni sau eterogeni [H — 1] și în moderatori solizi [S — 1] sau la calculul termalizării neutronilor [S — 2].

Și dezvoltările în serii Taylor sau în serii Lie, folosite alături de alte aproximații, au găsit numeroase aplicații la rezolvarea problemei Milne în aproximația Cebîșev în cazul monogrup în geometrie plană [C — 1], la studiul dependenței temporale, energetice și spațiale a termalizării neutronilor [K — 2], la rezolvarea ecuației de transport prin armonici sferice [M — 1] și la deducerea funcțiilor proprii ale acestei ecuații [O — 1].

De asemenea relația de biortogonalitate [M — 2] a unor polinoame s-a dovedit foarte utilă în rezolvarea ecuației de transport în cazuri speciale (în geometrii bidimensionale), prin dezvoltarea fluxului direcțional de neutroni în două sisteme diferite de polinoame de două variabile care

posedă proprietatea de biortogonalitate [L — 1] sau la probleme de transport în semispații, rezolvate prin funcții proprii singulare [M — 2], [M — 3]. Deosebit de utile, în special în problemele de transport neutronic cu dependență temporală, s-au dovedit și polinoamele Maxwell, ortonormale în intervalul $(0, \infty)$, a căror funcție de ponderare este [C—2].

$$\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 \exp(-x^2)\right].$$

BIBLIOGRAFIE

1.1. Armonici sferice (Polinoame Legendre)

B—1 Baraff A. G., Phys. Rev., **133** (1A), *A26* (1964).
B—2 Bennett J. H., *Truncation errors in numerical solutions of the transport equation*, Thesis, Harvard, University, 1962.
C—1 Callen J. D. et al., TANS, **8**, 291, (1965).
C—2 Case K. M. et al., J. Math. Phys., 4, 1376 (1963).
D—1 Davison B., *Neutron transport theory*, Oxford, Clarendon Press, 1957.
D—2 Davison B., Canad. J. Phys., **38**, 1526 (1960).
D—3 Dawson C., TANS, **6**, 17 (1963).
D—4 Drawbaugh D. W. et al., : N.S.E, **6**, 79 (1959).
G—1 Glasstone S. et al., *The elements of nuclear reactor theory*, Princeton-New York, Van Nostrand Co. 1952.
H—1 Hurwitz H. Jr. et al., J. Appl. Phys., **26**, 923 (1955).
M—1 Mullin C. R., NSE, **6**, 160 (1959).
M—2 Mack R. J. et al., NSE, **7**, 144 (1960).
M—3 Marchuk G. S. et al. *Teoria i metodi rasciota jadernih reaktorov*, Moskva, Gosatomizdat 1962.
M—4 Mingle J. O., NSE, **11**, 85 (1961).
M—5 Mingle J. O., NSE, **15**, 161 (1963).
M—6 Mingle J. O., TANS, **6**, 1 (1963)
N—1 Norwood J. M. et al., JNE, **17**, 245 (1963).
P—1 Pomraning G. C., Nukl., **6**, 348 (1964).
P—2 Pomraning G. C, NSE, **22**, 328 (1965).
R—1 Roşescu T., *Neutron transport theory*, Bibl. IFA-FR—48, 1965; IFA—FR—51, 1966.
S—1 Schiff D. et al., NSE, **7**, 172, 1960.
W—1 Weinberg A. M., Wigner E. P., *The physical theory of neutron chain reactors*, Univ. of Chicago Press, 1958.
W—2 Wilf H. S., J. Math. Mech., **1**, 225 (1960).
Z—1 Ziering S. et al., NSE, **3**, 635, 1958.

1.2. Polinoame Jacobi—Gegenbauer

B—1 Bell G. I. et al., PICG, **2**, 25, (1964), P/261
M—1 Mika J. et al., Bull. Acad. Polon. Sci., **8**, 59 (1960).
N—1 Nonnenmacher Th., Atomkernen, *7/8*, 263 (1966).
N—2 Nonnenmacher Th., *Developments in Transport Theory*, Londra, Academic Press, 1679.
P—1 Pomraning G. C. et al., NSE, **17**, 8 (1963).
Z—1 Zelazny R., NP-8850 (Poland), 1960.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Polinoame Cebîșev

A—1 Aspelund O., PICG, **16**, 530 (1958), (P/573).
B—1 Bell G. I. et al., PICG, **2**, 25, 1964, (P/261).
C—1 Conkie W. R., NSE, **6**, 260 (1959); CRT-754 (1958).
D—1 Davison B., *Neutron transport theory*, Oxford Clarendon Press, 1957.
S—1 Stewart J. C., Thesis, Rayleigh Univ. of North Carolina, 1963.
Y—1 Yabushita S., J. Math. Phys., **2**, 543 (1961).
W—1 Warner H., Nukl., **1**, 60 (1958).

1.4. Alte dezvoltări polinomiale

C—1 Conkie W. R., NSE, 260, 1959.
C—2 Čopič M. et al., NIJS—Rep. R—*456*, 1965.
D—1 Desloge E. A., Amer. J. Phys. **32**, 733, (1964).
H—1 Häffele W. et al., NSE, **7**, 304 (1960).
J—1 Johnson R. L., Thesis, Univ. of California, 1965.
K—1 Kottwitz D. A., NSE, **7**, 345 (1960).
K—2 Kunaish H. H., Thesis, Gainesville, Univ. of Florida, 1964.
K—3 Kazarnovski M. V. et al., PICG, 16, 279, 1958.
L—1 Lathrop K. D. et al., LA—DC—8478, 1966.
M—1 Mennig J., Z. Angew. Math. Phys., **17**, 334 (1966).
M—2 Mc. Cormick NJ et al: J. Math. Phys. **7** (*11*) 2036, (1966).
M—3 Mc. Cormick NJ. et al: J. Math. Phys. **6**, (*12*), 1939, (1965).
O—1 Ohanian M. J., Thesis, Rensselaer Polyt. Inst., 1963.
P—1 Purohit S. N., NSE, **9**, 157 (1960).
S—1 Singwi K. S., Ark. för Fys., **16**, 385 (1959).
S—2 Szeghö L., et al., Proc. Conf. Reactor Theory and Techn., Praga, 1963.
V—1 Vertes P., Proc. Conf. Reactor Theory and Techn., Praga, 1963.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

Aproximaţiile integrale ale transportului neutronilor

Pe lîngă metoda clasică a rezolvării ecuaţiei diferenţiale a transportului neutronilor prin dezvoltări în serii de polinoame, a mai fost folosită încă de la început o metodă care pare mai dificilă la prima vedere şi care constă în folosirea aspectului integral al transportului neutronilor în diverse medii.

Această metodă este mai dificilă în general, deoarece teoria matematică a ecuaţiilor integrale este mai puţin dezvoltată în comparaţie cu teoria ecuaţiilor diferenţiale sau integro-diferenţiale, necesită calcule mai complicate şi condiţii mai restrictive pentru a putea fi aplicată.

Dar, în anumite condiţii de geometrie sau de situaţii fizice, s-a găsit că metoda bazată pe aspectul integral al transportului neutronilor scapă de dificultăţile amintite şi, în plus, ne furnizează soluţii mai exacte (uneori riguros exacte), care pot fi extinse şi la cazul sistemelor neomogene, cu distribuţii complexe de surse, de medii sau de configuraţii.

În special această metodă este folosită cu succes în studiul sistemelor de dimensiuni mici (celulele reţelelor) faţă de drumul liber mijlociu al neutronilor, adică la calculul distribuţiilor spaţiale, energetice sau temporale ale neutronilor, în calculele reţelelor eterogene, şi deci indirect la calculul criticităţii lor, la care aproximaţiile obişnuite, diferenţiale, dau rezultate mai slabe. Aspectele de structură fină sînt astfel cel mai bine redate de metodele integrale şi mai ales în geometriile cele mai apropiate de realitate ale reactorilor moderaţi cu apă grea sau uşoară.

Metodele integrale mai au marele avantaj de a nu necesita nici o presupunere iniţială asupra diverselor distribuţii neutronice, ca în metodele diferenţiale, iar absenţa necesităţii de a neglija anumiţi termeni în dezvoltarea distribuţiei neutronilor (metoda de trunchiere) asigură o mai mare precizie rezultatelor integrale. Totuşi, împrăştierea anizotropă este mai dificil luată în considerare în noua metodă.

Formularea integrală a teoriei transportului neutronilor este indispensabilă în folosirea altor metode ca cele variaţionale, cele ale teoriei perturbaţiei sau ale metodei momentelor etc. (vezi cap. 4).

Graţie numeroaselor avantaje şi perspectivelor pe care metodele integrale le au în rezolvarea problemelor de fizică a reactorilor, acestora le-au fost dedicate cîteva sute de lucrări [R — 1].

Scanned with OKEN Scanner

Printre acestea au apărut și încercări încununate de succes de a aplica metoda ecuației integrale la aproximații mai simple, cum ar fi cea a difuziei elementare a neutronilor [T — 1]. Folosind nuclee integrale de difuzie (vezi § 2.5), ecuațiile de difuzie multigrup sînt transformate într-un sistem de ecuații integrale. Printr-o transformată Fourier, acest sistem este redus la ecuații de tip Fredholm cu nucleu degenerat, ale căror soluții se demonstrează matematic că se reduc totdeauna la cele ale unor sisteme de ecuații algebrice liniare cu un număr infinit de necunoscute.

Datorită proprietăților de simetrie ale nucleelor integrale de difuzie, matricea sistemului de ecuații algebrice va fi de asemenea simetrică, ceea ce va conduce la avantaje substanțiale în soluționarea sistemului respectiv, deoarece o matrice infinită simetrică poate fi înlocuită cu una finită.

Deși la prima vedere s-ar putea crede că această metodă, în care se trece de la o aproximație simplă (cea de difuzie) la alta mult mai dificilă (cea integrală), este scopul principal al numeroaselor aproximații ale teoriei transportului, totuși se observă că final chiar ecuațiile simple de difuzie ale neutronilor sînt înlocuite cu sisteme finite de ecuații algebrice și mai simple.

Dar pe parcurs, prin formularea integrală intermediară și prin aportul ei direct, soluțiile s-au îmbogățit printr-o mai mare cantitate de informație și printr-o mai mare precizie, ceea ce constituie fără îndoială un rezultat remarcabil.

După modul de abordare, aproximațiile integrale au putut fi clasate în cîteva mari metode, strîns legate între ele matematic, dintre care cele mai cunoscute sînt: metoda ecuației integrale și metoda funcțiilor proprii singulare, bazată pe ecuația integrală singulară a transportului neutronilor; metoda probabilităților de ciocnire, care are la bază o formulare integrală a diverselor probabilități de ciocnire a neutronilor în reactor; metoda transformatelor integrale, care permit eliminarea unora dintre variabilele ecuației de transport, și metoda nucleelor integrale.

Ecuațiile integrale la care este redusă ecuația de transport în oricare dintre metodele de mai sus se pot rezolva numeric prin metode cunoscute din teoria ecuațiilor integrale, ca:

— aproximarea ecuațiilor integrale prin ecuații algebrice;

— aproximația coeficienților nedeterminați, sau metoda lui Galerkin;

— metoda celor mai mici pătrate;

— metoda lui Ritz;

— metoda dezvoltării soluției în funcții proprii.

Datorită faptului că aplicarea ecuației de transport la probleme practice de reactori include interfețe și deci discontinuități ale derivatelor spațiale ale fluxurilor neutronice, cele mai utile metode de rezolvare

Scanned with OKEN Scanner

a ecuațiilor integrale de transport sînt cele bazate pe interpolări și pe formule de integrare care conțin derivate spațiale de ordinul întîi furnizate în mod direct chiar de ecuația de transport. Și proprietatea de liniaritate a ecuației de transport este utilă, permițînd folosirea principiului suprapunerii soluțiilor parțiale.

Printre primele lucrări care au abordat acest aspect în transportul neutronilor se numără [D — 1] și mai ales [C — 1], pe cea din urmă folosind-o cu precădere în expunerea care urmează a bazelor metodei.

Pentru cititorul dornic să aprofundeze aceste probleme au apărut remarcabile lucrări de sinteză asupra metodei integrale, ca [C — 2], [S — 1], sau bibliografii [R — 1].

Pentru a folosi aspectul integral al teoriei transportului neutronilor este necesar a deduce bilanțul neutronilor în reactor sub forma unei ecuații integrale. Aceasta se obține fie transformînd ecuația integro-diferențială a lui Boltzmann, deja dedusă pentru transportul neutronilor, într-o ecuație integrală, fie pornind direct de la modelul fizic al transportului neutronilor folosit la deducerea bilanțului neutronilor în reactor.

O transformare directă în ecuație integrală se obține prin integrarea ecuației integro-diferențiale a transportului neutronilor de-a lungul unei traiectorii a acestora pe direcția Ω de la $-\infty$ la un punct r.

Domeniul ecuațiilor integrale de transport al neutronilor mai are și altă semnificație, specială pentru cititorul român, fiind domeniul în care întîlnim și realizări teoretice directe ale unor cercetători români (realizările indirecte bazate pe teoria ecuațiilor integrale singulare ale lui T. Lalescu și S. Sanielevici vor fi amintite în § 2.2).

Printre acestea trebuiesc amintite lucrările [D — 2], [D — 3] (prezentate de însuși Louis de Broglie (1949)) în care autorul reduce ecuația generală de transport pentru neutroni la o ecuație integrală de tip Fredholm pe care o rezolvă.

Mai recent, un alt autor român [V — 1] publică o suită de articole (indicate în lucrarea citată) în care deduce soluțiile unor ecuații integrale de tip Fredholm, Volterra sau mixte, întîlnite în electronică și în teoria transportului neutronilor. În timp ce în majoritatea lucrărilor privind aspectele integrale ale transportului neutronilor, sînt tratate doar ecuații integrale cu o singură variabilă, autorul citat studiază aceste ecuații și în variantele cu două sau mai multe variabile, care necesită deci mai puține presupuneri simplificatoare în rezolvarea ecuației de transport. De asemenea el a demonstrat că problemele Dirichlet pentru ecuațiile integro-diferențiale eliptice (categorie în care intră și ecuația de transport pentru neutroni) se reduc tot la rezolvarea unor ecuații integrale de tip Fredholm. Și ecuația diferențială a „telegrafiștilor" (întîlnită în teoria transportului neutronilor dependentă de timp — vezi § 2.5.9) a fost rezolvată de acest autor (de fapt pentru fenomene electromagnetice) prin transformarea ei într-o ecuație integrală și soluționarea prin metoda lui Picard.

Scanned with OKEN Scanner

2.1. Metoda ecuației integrale

La o analiză mai aprofundată, denumirea acestei metode ar putea părea insuficient de motivată, deoarece toate metodele descrise în acest capitol se bazează pe ecuația integrală a transportului neutronilor. Întrucît însă în acest prim paragraf ne mărginim doar la acele aplicații din fizica reactorului în care importantă este deducerea ecuației integrale de transport, care reprezintă, după cum se știe, chiar anumite mărimi neutronice căutate, aceasta poate fi tratată separat. Celelalte metode integrale se bazează fie pe o formă specială a ecuației integrale (singulară în § 2.2), fie pe noțiunea de probabilități de ciocnire (§ 2.3), fie, în sfîrșit, pe folosirea transformatelor și a nucleelor integrale (§ 2.4 și § 2.5).

2.1.1. Distribuția neutronilor în medii cu $\Sigma = 0$, fără dependență temporală

Bilanțul neutronilor în cazul staționar (deci la echilibru) este exprimat în acest caz de condiția ca pierderile de neutroni din elementul de volum din jurul unui punct $\mathbf{r}$ să fie egale cu acumularea de neutroni produși de către sursa S în același element de volum.

Amintindu-ne (Introducere) că pierderile de neutroni sînt exprimate matematic prin expresia $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$, unde $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ este fluxul unghiular de neutroni, obținem ecuația bilanțului neutronilor în acest caz sub forma

$$\boldsymbol{\Omega} \nabla \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}). \tag{2.1}$$

Înainte de integrarea acestei ecuații diferențiale, care ne va furniza ecuația integrală căutată, o vom transforma, pentru a fi mai comodă scopului nostru, prin considerarea din punct de vedere matematic a termenului de scăpări de neutroni drept o derivată parțială pe direcția $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} \nabla = \frac{\partial}{\partial_s}, \tag{2.2}$$

s fiind variabila a cărei variație are loc pe direcția $\boldsymbol{\Omega}$.

(2.1) devine în acest caz

$$\frac{\partial}{\partial_s} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \tag{2.3}$$

sau, prin integrarea pe s (deci o integrală de linie), se obține

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_s S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})\, ds + \Phi_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \tag{2.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care termenul $\Phi_0(\mathbf{r}, \Omega)$ poate fi luat arbitrar egal cu zero și reprezintă, ca de obicei, soluția ecuației omogene

$$\Omega \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0.$$

(2.4) este ecuația integrală a transportului neutronilor în cazul simplificat luat în considerare, și ea reprezintă în același timp și o soluție a ecuației diferențiale (2.1), prin care pot fi descrise matematic numeroase situații fizice întîlnite în teoria reactorilor nucleari. În cazul analizat, această soluție reprezintă chiar fluxul direcțional de neutroni.

Pentru ca expresia (2.4) să fie cît mai comodă în calcule practice de fizică a reactorului, o vom supune la două transformări:

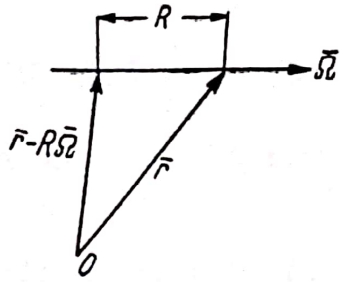


Fig. 2.1

— prima se bazează pe o schimbare a variabilei de integrare de la s la R, conform figurii 2.1, care permite să scriem în loc de (2.4)

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_0^\infty S(\mathbf{r} - R\,\Omega, \Omega)\, dR \qquad (2.5)$$

și care are sensul fizic al sumei totale a contribuțiilor tuturor surselor S care se găsesc pe segmentul paralel la direcția Ω ce trece prin $\mathbf{r}$ și care satisface condiția $0 \leqslant R < \infty$.

Cu alte cuvinte, sursele situate în afara acestui segment sau pe acest segment în poziții $R < 0$ nu contribuie la soluția de mai sus a ecuației integrale de transport a neutronilor;

— a doua transformare se referă la trecerea de la integrala de linie la cea de volum în ecuația (2.5) și pentru care este necesară introducerea unei funcții definite prin

$$\delta_2(\Omega \cdot \Omega') = 0 \quad \text{pentru } \Omega' \neq \Omega. \qquad (2.6)$$

Această funcție, care ne va folosi la o nouă definire a sursei $S(\mathbf{r}, \Omega)$, este diferită de obișnuita funcție delta (Dirac) pentru direcții, definită prin

$$\delta(\Omega \cdot \Omega' - 1) \equiv \delta(\mu_0 - 1), \qquad (2.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\Omega \cdot \Omega' \equiv \cos\theta_0 \equiv \mu_0$, și are proprietatea

$$\int_{\Omega'} g(\Omega')\, \delta_2(\Omega \cdot \Omega')\, d\Omega' = g(\Omega). \tag{2.8}$$

Întrucît însă funcția delta pentru direcții, definită de (2.7) poate fi comod folosită, în teoria matematică ce urmează vom exprima funcția δ_2 prin intermediul funcției δ. Pentru aceasta integrăm (2.7) pe toate direcțiile posibile permise de orientările posibile între Ω și Ω', obținînd

$$\int_{\Omega} \delta(\Omega \cdot \Omega' - 1)\, d\Omega = \int_{-1}^{+1} \delta(\mu_0 - 1)\, d\mu_0 \int_0^{2\pi} d\psi_0 = 2\pi \tag{2.9}$$

și deci

$$\delta_2(\Omega \cdot \Omega') = \frac{1}{2\pi}\, \delta(\Omega \cdot \Omega' - 1). \tag{2.10}$$

Cu ajutorul acestei funcții, sursa de neutroni se poate exprima matematic prin identitatea

$$S(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \int_{\Omega'} S(\mathbf{r}, \Omega')\, \delta_2(\Omega \cdot \Omega')\, d\Omega' \tag{2.11}$$

și ecuația integrală (2.5) devine

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) &= \int_0^{\infty} dR \int_{\Omega'} S(\mathbf{r} - R\Omega', \Omega')\, \delta_2(\Omega \cdot \Omega')\, d\Omega = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\Omega'} S\left(\mathbf{r} - \rho, \frac{\rho}{R}\right) \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\rho}{R}\right) dR \cdot d\Omega', \end{aligned} \tag{2.12}$$

unde pentru simplificare s-a introdus și vectorul

$$\rho \equiv R\Omega' \quad ; \quad d\rho = R^2\, dR\, d\Omega'. \tag{2.13}$$

O nouă simplificare a ecuației (2.12) se obține observînd că $(\mathbf{r} - \rho)$ poate fi înlocuit printr-o nouă variabilă $\mathbf{r}'$, în timp ce R poate fi de asemenea exprimat prin noua variabilă,

$$R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \equiv |\rho|.$$

Aceasta face ca și domeniul de integrare să fie acum întreg volumul V :

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_V S\left(\mathbf{r} - \rho \frac{\rho}{R}\right) \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\rho}{R}\right) \frac{d\rho}{R^2} = \int_V \frac{S\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R}\right) \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{R}\right) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \tag{2.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

De la această expresie, care reprezintă fluxul direcțional (sau unghiular) de neutroni, se poate trece ușor la fluxul total $\Phi(\mathbf{r})$ de neutroni, independent de direcția Ω, considerînd că acest $\Phi(\mathbf{r})$ reprezintă traiectoria străbătută de toți neutronii de viteză v, indiferent de direcția lor, adică

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, \Omega)\, d\Omega \text{ și } S(\mathbf{r}) \equiv \int_{4\pi} S(\mathbf{r}, \Omega)\, d\Omega. \tag{2.15}$$

Înlocuind (2.14) în (2.15), obținem

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \int_{V} \frac{S\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{R}\right) \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{R}\right) d\mathbf{r}'\, d\Omega}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = \int_{V} \frac{S\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{R}\right) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}. \tag{2.16}$$

În cazul unei surse punctiforme de intensitate S_0 situată în $\mathbf{r}_0$, și emițînd neutroni cu o distribuție unghiulară $A(\Omega)$, putem scrie sursa sub forma

$$S(\mathbf{r}', \Omega) \equiv S_0 A(\Omega)\, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \tag{2.17}$$

care ne permite, prin folosirea directă a relațiilor de mai sus, să obținem fluxul direcțional

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{S_0 A\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right) \delta_2\left(\Omega, \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \tag{2.18}$$

și fluxul total

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{S_0 A\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}. \tag{2.19}$$

Datorită semnificației lui δ_2, expresia lui $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ pentru sursă punctiformă ne arată că există flux de neutroni în $\mathbf{r}$ din direcția Ω, cu condiția ca Ω să se găsească pe $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, iar mărimea acestui flux e dată de $S_0 A / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$.

În cazul fluxului total, $\Phi(\mathbf{r})$ din punctul $\mathbf{r}$ datorat sursei de neutroni din $\mathbf{r}_0$ este egal cu fracțiunea din numărul de neutroni care pleacă din $\mathbf{r}_0$ numai pe direcția $\mathbf{r}$, împărțit ca de obicei la $\mathbf{r}^2$, adică $S_0 f / \mathbf{r}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

2.1.2. Distribuția neutronilor în medii cu $\Sigma_a \neq 0$ ($\Sigma_s = 0$)

În acest caz, ecuația diferențială a bilanțului neutronilor are forma

$$\Omega \nabla \Phi (\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_a (\mathbf{r}) \Phi (\mathbf{r}, \Omega) = S (\mathbf{r}, \Omega), \tag{2.20}$$

în care singurele pierderi de neutroni au loc prin absorbție și transport, iar singurele acumulări de neutroni sînt datorate sursei S.

Înainte de a transforma această ecuație diferențială într-o ecuație integrală și a rezolva direct această ecuație, observăm că ea poate fi adusă la forma (2.1) prin introducerea unei noi variabile β, care are sensul fizic al unei grosimi optice și care în general, pentru un mediu neomogen, are expresia

$$\beta (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv \int_0^{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \Sigma_a (\mathbf{r}_0 - w\Omega)\, dw, \tag{2.21}$$

în timp ce pentru mediu omogen are forma mai simplă

$$\beta (\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv \Sigma_a |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

unde w este coordonata punctului de pe dreapta paralelă la direcția Ω și care trece prin $\mathbf{r}$. Notînd

$$\theta \equiv |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|, \tag{2.22}$$

observăm că operatorul $\Omega \cdot \nabla$ ia forma

$$\Omega \nabla = \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta}, \tag{2.23}$$

care devine, ținînd seama de expresia lui β,

$$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \beta} = \Sigma_a (\mathbf{r}_0 - |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \Omega) \frac{\partial}{\partial \beta} \equiv \Sigma_a (\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \beta}. \tag{2.24}$$

Ecuația bilanțului neutronilor (2.20) ia deci forma simplificată

$$\Sigma_a \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \Sigma_a \Phi = S, \tag{2.25}$$

care poate fi acum ușor transformată într-o ecuație integrală prin înlocuirea fluxului Φ prin produsul Φe^{β}, unde e^{β} joacă rolul unui factor de integrare :

$$\frac{\partial (\Phi e^{\beta})}{\partial \beta} = \Phi e^{\beta} + e^{\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \tag{2.26}$$

și deci (2.25) se reduce la

$$\frac{\partial \Phi e^{\beta}}{\partial \beta} = \frac{S e^{\beta}}{\Sigma_a}. \tag{2.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît această ecuație este de forma (2.3), se poate folosi direct rezultatul obținut în soluționarea acestei ecuații. O cale mai directă constă însă în integrarea pe β a ecuației (2.27), care conduce la soluția

$$\Phi = \int \frac{S \cdot e^{\beta' - \beta} \, d\beta'}{\Sigma_a}, \tag{2.28}$$

unde

$$\beta' \equiv \beta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) = \int_0^{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Sigma_a (\mathbf{r}_0 - w\,\boldsymbol{\Omega})\, dw \tag{2.29}$$

și

$$\beta' - \beta \equiv \int_{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}^{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|} \Sigma_a (\mathbf{r}_0 - w\boldsymbol{\Omega})\, dw = \int_0^{0'} \Sigma_a (\mathbf{r}_0 - w\boldsymbol{\Omega})\, dw = \int_0^R \Sigma_a (\mathbf{r} - w\boldsymbol{\Omega})\, dw$$

$$= \beta(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \mathbf{r}) = \beta(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad ; \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \tag{2.30}$$

Pentru semnificația notațiilor vezi figura 2.2.

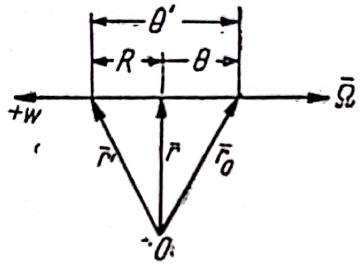


Fig. 2.2

Înlocuind în (2.28) expresia lui $\beta' - \beta$, precum și

$$d\beta' = \Sigma_a \, d\theta' = \Sigma_a \, dR, \tag{2.31}$$

obținem soluția finală care reprezintă fluxul direcțional de neutroni într-un mediu pur absorbant

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty S(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \boldsymbol{\Omega})\, e^{-\beta(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \mathbf{r})}\, dR, \tag{2.32}$$

care nu este alta decît soluția (2.5) din cazul mediului cu $\Sigma_i = 0$, la care s-a adăugat ca integrand un factor de atenuare $e^{-\beta}$ datorit pierderilor prin absorbție care apar în cazul mediului cu $\Sigma_a \neq 0$.

Pentru a putea obține fluxul total de neutroni se transformă întîi integrala din (2.32) într-o integrală de volum

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_V \frac{S(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}')\, \delta_2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}')\, e^{-\beta(\mathbf{r}', \mathbf{r})}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \tag{2.33}$$

Amintindu-ne că

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, \Omega)\, d\Omega, \tag{2.34}$$

obținem

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{V} \frac{S(\mathbf{r}', \Omega')\, e^{-\beta(\mathbf{r}', \mathbf{r})}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \tag{2.35}$$

Aplicații

Soluțiile ecuației de transport al neutronilor deduse în paragraful precedent sub forma unor ecuații integrale atît pentru fluxul total $\Phi(\mathbf{r})$, cît și pentru cel direcțional au față de soluțiile deduse prin metodele clasice de dezvoltări polinomiale avantajul de a fi riguros exacte, de a fi fost deduse în aceste cazuri simplificate mult mai rapid, cu o corespondență între sensul fizic și rezolvarea matematică mult mai profundă și permițînd obținerea unor noi rezultate pentru geometrii și condiții fizice diferite.

Astfel, în cazul sursei izotrope punctiforme de intensitate S_0 neutroni pe secundă dispusă în origine într-un mediu neomogen, termenul-sursă din (2.33) are expresia

$$S(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{S_0\, \delta(\mathbf{r})}{4\pi}, \tag{2.36}$$

ceea ce conduce la cunoscuta expresie a fluxului direcțional

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{S_0}{4\pi r^2} \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\right) e^{-\beta(0, \mathbf{r})} \tag{2.37}$$

și la cea a fluxului total

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{S_0\, e^{-\beta(0, \mathbf{r})}}{4\pi r^2}. \tag{2.38}$$

În cazul mediului omogen, expresia lui β este dată de (2.21), care conduce la simplificarea expresiilor pentru $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ și $\Phi(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_0^{\infty} S(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \Omega) e^{-\Sigma_a R}\, dR = \int_V \frac{S(\mathbf{r}', \Omega')\, \delta_2(\Omega \cdot \Omega')\, e^{-\Sigma_a |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \tag{2.39}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{S(\mathbf{r}', \Omega')\, e^{-\Sigma_a |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \tag{2.40}$$

Pentru sursa izotropă punctiformă de forma (2.36) se obțin

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{S_0\, \delta_2(\Omega, \frac{\mathbf{r}}{r})\, e^{-\Sigma_a r}}{4\pi r^2}, \tag{2.41}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{S_0 e^{-\Sigma_a r}}{4\pi r^2}. \tag{2.42}$$

2.1.3. Distribuția neutronilor în medii multiplicatoare ($\Sigma_a \neq 0, \Sigma_s \neq 0, \Sigma_f \neq 0$)

De la început este util a face deosebire între medii cu surse externe și medii fără surse.

a. Surse externe

În mod analog, cum trecerea de la cazul $\Sigma = 0$ la cazul $\Sigma_a \neq 0$ a constituit un prim pas spre generalizarea problemei propuse spre rezolvare, și în acest caz în ecuația bilanțului neutronilor apar doi noi termeni : cel de împrăștieri elastice ($\Sigma_s \neq 0$) și cel de fisiune ($\Sigma_f \neq 0$), care constituie sursele interne.

Dacă am fi urmărit o dezvoltare continuă a tratării diverselor probleme care apar în teoria transportului neutronilor, ar fi trebuit să considerăm acum tot cazul mediului nemultiplicator ($\Sigma_f = 0$) dar împrăștiant ($\Sigma_s \neq 0$), care ar fi urmat în mod normal după cazurile 1) $\Sigma = 0$ 2) $\Sigma_a \neq 0$.

Dar profitînd de faptul că cei doi noi termeni, diferiți din punct de vedere fizic și care reprezintă proprietățile de împrăștiere și de fisiune ale mediului, pot fi înlocuiți matematic printr-un singur termen de forma

$$c(\mathbf{r}) \equiv \frac{\nu \Sigma_f(\mathbf{r}) + \Sigma_s(\mathbf{r})}{\Sigma_t(\mathbf{r})}. \tag{2.43}$$

(în cazul mediului nemultiplicator)

$$\Sigma_f = 0 \text{ și } c = \Sigma_s/\Sigma_t, \tag{2.44}$$

vom trata în continuare acest caz generalizat. Nu trebuie uitat că noul termen, care reprezintă împrăștierea, este cel care introduce de obicei în tratarea integrală a ecuației de transport al neutronilor cele mai multe dificultăți matematice.

Ecuația bilanțului neutronilor se scrie în acest caz

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r})\, \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \Sigma_t(\mathbf{r})\, c(\mathbf{r}) \int_{\Omega'} (\Phi(\mathbf{r}, \Omega') f^*(\Omega, \Omega') d\Omega' + S(\mathbf{r}, \Omega), \tag{2.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f^*(\Omega, \Omega')\,d\mathbf{r}$ este o funcție generală de împrăștiere și care reprezintă probabilitatea ca un neutron cu direcția Ω' să producă, în urma unei ciocniri, un neutron secundar cu direcția Ω.

În această funcție intră deci și probabilitățile de fisiune. Considerînd că ciocnirile neutronilor sînt izotrope în sistemul laborator, funcția de împrăștiere ia o formă remarcabil de simplă,

$$f(\Omega, \Omega') = \frac{1}{4\pi},$$

care conduce și la simplificarea ecuației bilanțului neutronilor la o formă care ne permite deducerea imediată a soluției din rezultatele precedente:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \Sigma_t(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi}\Sigma_t(\mathbf{r})\,c(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (2.46)$$

Într-adevăr, sub această formă, ecuația bilanțului neutronilor este analogă ecuației (2.20), care a fost analizată și rezolvată în paragraful precedent, cu diferența că în membrul stîng al ecuației (2.46) apare Σ_t în loc de Σ_a, în timp ce membrul drept constituie aici o sursă generalizată cu doi termeni.

Soluțiile euației (2.46) vor fi deci de forma (2.32) pentru fluxul direcțional și (2.35) pentru fluxul total, cu condiția de a redefini mărimea β în funcție de Σ_t în loc de Σ_a, conform lui (2.21), și de a considera sursa ca fiind dată de tot membrul drept din (2.46) Se obține imediat

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \Sigma_t(\mathbf{r}-\mathbf{R})\,c(\mathbf{r}-\mathbf{R})\,\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{R})\,e^{-\beta(\mathbf{r}-\mathbf{R},\mathbf{r})}\,dR + \int_0^\infty S(\mathbf{r}-\mathbf{R}, \Omega)\,e^{-\beta(\mathbf{r}-\mathbf{R},\mathbf{r})}\,dR, \quad (2.47)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \left[S(\mathbf{r}', \Omega') + \frac{1}{4\pi}c(\mathbf{r}')\,\Sigma_t(\mathbf{r}')\,\Phi(\mathbf{r}')\right]\frac{e^{-\beta(\mathbf{r}',\mathbf{r})}\,d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}, \quad (2.48)$$

$$\Omega' = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Una dintre metodele cele mai folosite pentru rezolvarea acestor ecuații integrale se bazează pe aproximații succesive prin serii Neumann. De exemplu, pentru ecuația (2.48) se consideră că prima aproximație o constituie $\Phi(\mathbf{r})$ dat de această ecuație, în care neglijăm integrala pe $\Phi(\mathbf{r}')$ și luăm în considerare numai integrala pe S. În cea de-a doua aproximație succesivă considerăm că $\Phi(\mathbf{r}')$ de sub integrală este dat de $\Phi(\mathbf{r})$ al primei aproximații ș.a.m.d. După mai multe aproximații succesive în care am obținut valoarea lui $\Phi(\mathbf{r})$ cu precizia dorită, introducem această valoare în ecuația (2.47) pentru a obține și fluxul direcțional $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Cazul fără surse

În acest caz, ecuația (2.45) se simplifică prin dispariția termenului $S(\mathbf{r}, \Omega)$ din membrul drept și soluțiile se scriu imediat pentru mediu neomogen :

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \Sigma_t(\mathbf{r} - \mathbf{R})\, c(\mathbf{r} - \mathbf{R})\, \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R})\, e^{-\beta(\mathbf{r}-\mathbf{R},\mathbf{r})}\, d\mathbf{R}, \quad (2.49)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{c(\mathbf{r}')\,\Sigma_t(\mathbf{r}')\,\Phi(\mathbf{r}')\, e^{-\beta(\mathbf{r}',\mathbf{r})}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (2.50)$$

care se simplifică în cazul mediului omogen la

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_0^\infty \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{R})\, e^{-\Sigma_t R}\, d\mathbf{R}, \quad (2.51)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_V \frac{\Phi(\mathbf{r}')\, e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (2.52)$$

În continuare soluționarea acestor ecuații integrale va fi exemplificată pentru cazul mai simplu al mediului omogen.

Presupunem că o soluție particulară a acestei ecuații este de forma $\Phi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{B}\mathbf{r}}$ și căutăm condiția pe care trebuie s-o îndeplinească parametrul $\mathbf{B}$ pentru ca într-adevăr soluția să aibă această formă. Introducînd-o în ecuația (2.52), se obține

$$e^{i\mathbf{B}\mathbf{r}} = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_V \frac{e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\mathbf{B}\mathbf{r}'}\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (2.53)$$

care se reduce la

$$1 = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_V \frac{e^{-\Sigma_t\rho + i\mathbf{B}\rho}\, d\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \quad (2.54)$$

dacă se introduce noua variabilă $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}(\rho, \theta, \psi)$.

Introducerea noii variabile permite integrarea imediată în (2.54) :

$$1 = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\int_0^\infty d\rho \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} e^{-\Sigma_t\rho + i\mathbf{B}\rho\mu}\, d\psi = \frac{c\Sigma_t}{4\pi}\left[\frac{4\pi}{B}\, tg^{-1}\left(\frac{B}{\Sigma_t}\right)\right]. \quad (2.55)$$

Rezultă că $\Phi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{B}\mathbf{r}}$ este o soluție a ecuației (2.52), cu condiția ca B să satisfacă ecuația

$$\frac{1}{c} = \left[\frac{\Sigma_t}{B}\, tg^{-1}\frac{B}{\Sigma_t}\right]. \quad (2.56)$$

Această condiție este identică cu cea dedusă prin aproximațiile polinomiale ale ecuației de transport al neutronilor, în care B este parametrul material sau geometric al reactorului (*buckling*).

Cunoscînd o soluție particulară, se poate construi soluția generală dată de expresia (2.57),

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{u}} \partial(\mathbf{u})\, e^{iB\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{u}, \tag{2.57}$$

unde $\mathbf{B} = B\mathbf{u}$, iar $\mathbf{u}$ este vectorul unitate de direcție. Cu această soluție generală, expresia fluxului direcțional devine

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{c\,\Sigma_t}{4\pi}\int_0^\infty dR \int_u a(\mathbf{u})\, e^{iB\mathbf{u}(\mathbf{r}-\mathbf{R})-\Sigma_t R}\, d\mathbf{u} = \frac{c}{4\pi}\int_u \frac{a(\mathbf{u})\, e^{iB\mathbf{u}\mathbf{r}}\, d\mathbf{u}}{1+iB\mathbf{u}\cdot\Omega/\Sigma_t}. \tag{2.58}$$

Aceste soluții pentru cazul mediului infinit (fără surse) sînt deosebit de utile în numeroase probleme practice întîlnite în fizica reactorilor, deoarece permit rezolvarea cu o bună aproximație a unor probleme chiar pentru cazul mediilor finite, folosind metoda imaginilor. Vom exemplifica în cele ce urmează cazul reactorului-placă infinită și al reactorului sferic.

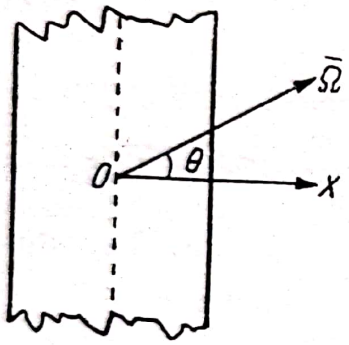


Fig. 2.3

Cazul reactorului-placă infinită. Fie deci o placă multiplicatoare infinită (pe y și z), de semigrosime a pe direcția x (fig. 2.3). Soluția (2.58) ar fi valabilă numai în cazul că și a ar fi infinit. Datorită simetriei în x și θ inerentă acestei probleme și considerînd inițial că și a este infinit, scriem soluția (2.58), care este exactă pentru acest caz:

$$\Phi(x, \theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iBx}}{1+\frac{iB}{\Sigma_t}\cos\theta} + \frac{e^{-iBx}}{1-\frac{iB}{\Sigma_t}\cos\theta}\right) = \frac{\cos Bx + \frac{B}{\Sigma_t}\cos\theta \sin Bx}{1+\frac{B^2}{\Sigma_t^2}\cos^2\theta}, \tag{2.59}$$

impunînd însă condiția, evidentă pentru mediu finit, ca fluxul să se anuleze la marginea plăcii:

$$\Phi(a, \theta) = 0 \quad ; \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

sau condiția mai reală și mai puțin restrictivă ca neutronii care părăsesc placa (deci chiar dacă fluxul de neutroni nu e nul la margine) să nu se mai întoarcă din direcții normale la placă:

$$\Phi(a, \pi) = 0. \tag{2.60}$$

Ecuația (2.59), cu condiția (2.60), conduce la o nouă expresie pentru condiția ce trebuie s-o îndeplinească *buckling*-ul B în cazul plăcii de grosime finită :

$$\operatorname{ctg} Ba = \frac{B}{\Sigma_t}, \tag{2.61}$$

care, împreună cu condiția generală (2.56), permite determinarea fie a dimensiunii critice a_c a reactorului-placă, fie concentrația critică a combustibilului.

O condiție și mai bună care să accentueze caracterul finit al plăcii și care să poată fi impusă soluției pentru mediul infinit este cea cunoscută din aproximația de difuzie, în care curentul parțial de neutroni dinspre vid să fie nul. Această condiție este exprimată matematic în general prin

$$\mathrm{d}A \int \Phi\,(\mathbf{a}, \boldsymbol{\Omega})\,(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{s}')\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.62}$$

și devine în cazul geometriei plane

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \Phi\,(a, 0) \cos\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0. \tag{2.63}$$

Impunînd această condiție soluției (2.59), se obține condiția mai bună ce trebuie satisfăcută de B :

$$\operatorname{ctg} Ba = \frac{B}{\Sigma_t}\left\{\frac{1 - \dfrac{\Sigma_t}{B}\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{B}{\Sigma_t}\right)}{\dfrac{1}{2}\log\left[1 + \left(\dfrac{B}{\Sigma_t}\right)^2\right]}\right\}. \tag{2.64}$$

Cazul reactorului sferic. În acest caz este mai simplu de a porni chiar de la ecuația (2.51) pentru mediu omogen sferic de rază a. După cum am mai arătat, soluția elementară a acestei ecuații pentru mediu infinit este de forma $\mathrm{e}^{i\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}}$, dar pentru cazul sferic aproximația de difuzie ne furnizează o soluție de forma

$$\Phi\,(r) = \frac{A \sin Br}{r}. \tag{2.65}$$

Folosind această soluție în (2.51), obținem pentru fluxul direcțional expresia

$$\begin{aligned}\Phi\,(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= \frac{c\,\Sigma_t A}{4\pi}\int_0^{\infty} \sin\left(B\,|\,\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right) \mathrm{e}^{-\Sigma_t R}\,\mathrm{d}R = \\ &= \frac{c\,\Sigma_t A}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{\left[\sin B\,(r^2 + R^2 - 2\,rR\mu)^{1/2}\right] \mathrm{e}^{-\Sigma_t R}\,\mathrm{d}R}{(r^2 + R^2 - 2\,rR\mu)^{1/2}},\end{aligned} \tag{2.66}$$

unde $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = rR\mu$; μ = cosinusul unghiului între r și R.

Ca și în cazul plan, impunem acestei soluții condiția de a se anula la marginea sferei :

$$\Phi\,(a,\,\pi) = 0,$$

care conduce la expresia

$$\frac{c\,\Sigma_t A}{4\,\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\Sigma_t R}\sin B\,(a+R)\,\mathrm{d}R}{(a+R)} = \frac{c\,\Sigma_t\,A\,\mathrm{e}^{-\Sigma_t a}}{4\,\pi}\int_a^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\Sigma_t s}\sin Bs\,\mathrm{d}s}{s} =$$

$$= \frac{K}{2\,\mathrm{i}}\int_a^{\infty}[\mathrm{e}^{-s(\Sigma_t - \mathrm{i}B)} - \mathrm{e}^{-s(\Sigma_t+\mathrm{i}B)}]\frac{\mathrm{d}s}{s} = -\,\mathrm{I}_m\,E_1\,(\Sigma_t\,a + \mathrm{i}Ba) = 0, \qquad (2.67)$$

unde $K = \dfrac{c\,\Sigma_t\,A\,\mathrm{e}^{-\Sigma_t a}}{4\,\pi}$; $E_1\,(z)$ = integrala exponențială, iar $\mathrm{I}_m\,E_1(z)$ = partea imaginară a lui $E_1\,(z)$ (vezi Anexa).

Deci condiția ca soluția pentru mediul infinit să fie valabilă pentru mediul finit, sferic, omogen este

$$-\,\mathrm{I}_m\,E_1\,(\Sigma_t\,a + \mathrm{i}Ba) = 0, \qquad (2.68)$$

care permite fie determinarea dimensiunilor critice prin evaluarea lui B, fie a concentrației critice de combustibil nuclear prin evaluarea lui Σ_t pentru un B dat.

2.1.4. Distribuția temporală a neutronilor

Ecuația bilanțului neutronilor primește în acest caz un termen nou în membrul stîng, care reprezintă variația în timp a fluxului de neutroni :

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega},t) + \boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega},t) + \Sigma_t(\mathbf{r})\,\Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega},t) = \frac{1}{4\,\pi}\,\Sigma_t\,(\mathbf{r})\,c\,(\mathbf{r})\,\Phi\,(\mathbf{r},t), \qquad (2.69)$$

unde am considerat pentru simplificare cazul fără surse externe S.

Se caută o soluție de forma

$$\Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega},t) = \Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,. \qquad (2.70)$$

Introdusă în ecuația (2.69), ea conduce la ecuația

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\,\Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) + \Sigma\,(\mathbf{r})\,\Phi\,(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\,\pi}\,\Sigma_t(\mathbf{r})\,c\,(\mathbf{r})\,\Phi\,(\mathbf{r}), \qquad (2.71)$$

care este de forma lui (2.46), cu soluțiile de forma (2.49) și (2.50).

Scanned with OKEN Scanner

Deosebirea esențială constă în aceea că aici am definit

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \Sigma_t + \frac{\alpha}{v}, \tag{2.72}$$

ca o secțiune de transfer în timp, obținută prin adăugarea la secțiunea de transfer propriu-zisă a mediului a unui termen care reprezintă o „absorbție" adițională în timp a neutronilor.

2.2. Aproximația funcțiilor proprii singulare

Această nouă metodă de aproximare în rezolvarea ecuației de transport pentru neutroni a fost expusă pentru prima dată în lucrarea lui Case [C—1][C—2], [C—3], [L—1] în 1960, și ea se baza pe o lucrare mai veche (1955) a lui Van Kampen [V—1] asupra teoriei undelor staționare și a oscilațiilor în plasme.

Punctul de plecare al noii aproximații îl constituie formularea ecuației integro-diferențiale de transport sub forma unei ecuații integrale singulare. Bazele teoriei acestui tip de ecuații și a soluționării ei au fost puse de matematicieni celebri, printre care se numără ca fondator și Traian Lalescu [M—3].

Forma generală a unei ecuații integrale liniare cu o singură necunoscută $f(x)$ este

$$\lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + g(x) = h(z) f(x), \tag{2.73}$$

unde $h(x)$ și $g(x)$ sînt date, iar $K(x, y)$ este nucleul ecuației integrale (kernel).

O astfel de ecuație integrală este singulară dacă una sau ambele limite de integrare (a, b) sînt infinite sau dacă nucleul $K(x, y)$ este infinit în unele puncte din intervalul de integrare.

Pentru $h(x) = 0$, ecuația integrală (2.73) devine o ecuație de tip Fredholm (speța I), în timp ce pentru $h(x) = 1$ este de speța a II-a. Dacă nucleul $K(x, y)$ se anulează pentru $y > x$, (2.73) devine o ecuație integrală de tip Volterra de speța I $[h(x) = 0]$ sau a II-a $[h(x) = 1]$.

Transformarea ecuației integro-diferențiale a transportului neutronilor într-o ecuație integrală singulară se efectuează fie printr-o transformată Fourier, ca în metoda Wiener—Hopf, fie prin intermediul ecuațiilor integrale Fredholm asociate [L—5].

Soluția acestei ecuații integrale singulare de tip Fredholm de speța a II-a, la care se reduce ecuația transportului neutronilor printr-o transformare adecvată, este definită prin intermediul funcției Dirac și nu mai reprezintă o funcție în sensul clasic, ci o distribuție : ea este formată

de fapt dintr-o componentă discontinuă și una continuă, care sînt ortogonale și formează un sistem complet.

Observația cea mai valoroasă a lui Van Kampen, care a permis extinderea acestei metode și la transportul neutronilor, a fost tocmai cea privind caracterul de distribuții, în sensul lui Schwartz, al soluțiilor ecuației de transport. Această proprietate constituie condiția suficientă pentru ca soluțiile respective să poată fi dezvoltate în funcțiile proprii singulare, a căror completitudine și ortogonalitate sînt asigurate în majoritatea problemelor din domeniile abordate de fizica reactorilor.

Unul dintre marile avantaje ale noii metode constă în faptul că a lărgit domeniul problemelor care pot fi rezolvate riguros exact, iar importanța acestor soluții exacte, care este mai puțin mare în problemele practice ale fizicii reactorilor, este covîrșitoare mai ales în verificarea valabilității numeroaselor metode de aproximare existente sau în curs de elaborare pentru ecuația de transport neutronic.

Pentru aplicarea aproximației funcțiilor proprii singulare, numită în unele lucrări și metoda modurilor normale, este necesară liniaritatea și invarianța translațională a operatorului Boltzmann de transport, care asigură valabilitatea separării variabilelor și conduce la obținerea ecuației singulare în variabila unghiulară.

Condiția de invarianță translațională nu este atît de strictă, ea putînd să se refere nu numai la translații infinitezimale, ci chiar la translații finite discrete, cum sînt, de exemplu, cele condiționate de existența unei rețele spațiale, ca la reactorii eterogeni.

Pentru problemele în care condițiile la margine sînt date pentru întreg domeniul variabilei unghiulare μ $(-1, +1)$, coeficienții dezvoltării soluțiilor în funcții proprii singulare se deduc direct din condițiile de ortogonalitate ale acestor funcții, în timp ce, în problemele în care condițiile la margine sînt date numai pentru intervale parțiale ale variabilei unghiulare $(-1,0$ sau $0,+1)$, coeficienții dezvoltării satisfac o ecuație integrală de tip Fredholm cu nucleu degenerat, care are avantajul de a conduce ușor la soluții analitice destul de simple. Tot la astfel de ecuații integrale Fredholm degenerate se ajunge și în problemele de transport neutronic în medii infinite cu dependență temporală.

Condiția satisfacerii relațiilor de ortogonalitate pentru deducerea coeficienților dezvoltărilor în funcții proprii singulare poate fi înlocuită în unele cazuri de condiția satisfacerii relațiilor integrale de spațiu întreg între funcțiile proprii ale diverselor regiuni. Această înlocuire are însă dezavantajul de a conduce la soluții mult mai complicate analitic, fiind funcții de anumite integrale singulare multiple foarte dificile.

Una dintre particularitățile cele mai remarcabile ale noii metode o constituie constatarea că funcțiile proprii singulare ale ecuației Boltzmann pentru transportul neutronilor constituie două componente dis-

Scanned with OKEN Scanner

tincte atît matematic *, cît și ca interpretare fizică : o componentă continuă și una formată dintr-un spectru discontinuu de funcții proprii. În timp ce componenta discontinuă a fost identificată cu funcții binecunoscute în teoria reactorilor, care descriu comportarea de tip de difuzie a neutronilor ce au suferit un număr mare de ciocniri (componenta asimptotică a fluxului), componenta continuă a fost identificată pe baza unei dependențe spațiale similare, cu fluxul de neutroni care nu au suferit încă nici o ciocnire (așa-numitul flux virgin). Integrarea componentei continue a funcțiilor proprii pe variabila unghiulară μ va conduce deci la fluxul de neutroni după prima ciocnire (care are ponderea cea mai mare printre neutronii ce au suferit un număr mare de ciocniri).

În cursul formulării matematice a metodei, cînd este necesară integrarea pe variabila unghiulară μ, apar integrale Cauchy dublu singulare, în a căror rezolvare este necesară inversarea ordinii integrării prin utilizarea formulei de transformare Poincaré—Bertrand.

Întrucît această utilizare nu este scutită de riscul unor interpretări eronate, a fost necesară fundamentarea matematică riguroasă a condițiilor de aplicabilitate prin introducerea noțiunii de funcții generalizate.

Grație avantajelor ei, metoda a fost extinsă și la împrăștieri anizotrope (abordate mai dificil în aproximațiile clasice), la dependența energetică și mai ales la regiuni multiple.

Un dezavantaj al metodei funcțiilor proprii singulare îl constituie faptul că spectrul de valori proprii diferă de la o problemă la alta, fiind foarte sensibil la cele mai mici modificări ale condițiilor fizice ale problemelor studiate. De asemenea, generalizarea la alte geometrii decît cea plană, căreia i-au fost dedicate majoritatea lucrărilor de pînă acum, este dificilă, nefiind riguros demonstrată. În timp ce trecerea de la placă la sferă este formal simplă, cea necesară la abordarea geometriei cilindrice a fost dedusă de curînd [B—2] prin intermediul unor transformări Sonine.

În unele cazuri (la dependența $1/v$ a secțiunilor și în geometrie sferică) [A—1] se găsește că spectrul funcțiilor proprii singulare este în întregime discret și format dintr-un număr infinit de valori proprii fără componentă continuă, iar în alte cazuri valorile discrete sînt înglobate în spectrul continuu, ceea ce face dificilă analiza lor și stabilirea condițiilor și limitelor de existență.

Simplificări esențiale față de metoda inițială a lui Case se obțin prin generalizarea [K—3] metodei Wiener—Hopf la deducerea funcțiilor proprii singulare sau prin generalizarea relațiilor de orto- și biortogonalitate [K—4].

Cele peste 100 de lucrări dedicate în numai cîțiva ani acestei noi aproximații folosite în teoria transportului neutronilor atestă interesul de care se bucură printre specialiști datorită avantajelor pe care le prezintă și rezultatelor remarcabile obținute.

* Această particularitate a fost demonstrată cu 30 de ani mai înainte (în 1932) și de către matematicianul român acad. S. Sanielevici (C. R. Paris, 194, 683, 829, 1932).

Scanned with OKEN Scanner

Aceste lucrări se referă la

— calcule de criticitate [K—7], [M—6], [Z—2], [Z—3], [Z—6], [Z—7];

— calcule de termalizare [C—5], [C—6], [K—1], [K—2], [M—5], [M—11], [O—1];

— studiul problemelor cu împrăștiere anizotropă [B—6], [G—1], [H—1], [L—1], [S—1], [Z—5], [Z—7], liniară (valabilă pentru orice mediu afară de hidrogen) [K—4], [L—5], [M—4], [M—8], [T—1] sau de ordin I [G—2], [Z—1];

— studiul dependenței temporale [B—3], [K—1], [K—2], [Z—5] sau energetice [B—1], [C—5], [C—6], [F—1], [F—3], [H—1], [H—2], [K—1], [K—2], [L—3], [P—1], [Z—5], [Z—6], [Z—7], [Z—8] a diverselor distribuții de neutroni;

— calculul albedoului diverselor materiale nucleare [L—6], [M—1], [M—6], [M—7], [Z—1], [Z—2], [Z—4], [Z—6], [Z—7], al unor parametri nucleari ca lungimea de difuzie, factorul de dezavantaj [F—2], [R—1] sau distanța de extrapolare [G—1], [G—2], [M—5];

— în rezolvarea problemelor de sursă pulsată [B—5], [K—1], [K—2].

După familiarizarea cu noua aproximație s-au observat și demonstrat matematic o serie de legături remarcabile cu alte metode matematice, cum ar fi cea a înglobării invariante [P—2] (vezi cap. 3), echivalența dintre ecuația de transport a neutronilor și ecuațiile integrale singulare [M—6], legătura dintre ortogonalitatea funcțiilor proprii și adjunctivitatea ecuațiilor integrale singulare [B—6] sau legătura cu aproximația armonicilor sferice [N—1].

Toate aceste legături au permis aprofundarea metodei funcțiilor proprii singulare și extinderea ei la majoritatea problemelor studiate în domeniile conexe respective.

Au fost efectuate comparații concludente între metodele clasice, cum ar fi aproximația armonicilor sferice și cea a funcțiilor proprii singulare [G—1], și s-au folosit chiar unele analogii remarcabile obținute în tratarea prin aproximația funcțiilor proprii singulare a altor domenii, ca fizica plasmei, hidrodinamica etc. [A—1], [A—2], [L—4], [V—1], [V—2].

În aplicarea metodelor aproximației funcțiilor proprii singulare la rezolvarea ecuației transportului neutronic se deosebesc două variante:

— se transformă ecuația integro-diferențială de transport într-o ecuație integrală singulară prin metoda transformatei Fourier și apoi se soluționează această ecuație conform teoriei date de Muskhelishvilli [M—3];

— se separă variabilele spațială și unghiulară printr-o transformare exponențială, obținîndu-se o ecuație de valori proprii; soluția acestei ecuații, prin dezvoltarea în funcțiile proprii corespunzătoare, se obține în urma determinării coeficienților arbitrari ai dezvoltării care satisfac ecuații integrale singulare.

Scanned with OKEN Scanner

a. Împrăștierea izotropă

În prima variantă, pe care o vom demonstra în aproximația monoenergetică cu împrăștiere izotropă, fără sursă și în geometrie plană, caracterizată de ecuația de transport

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2}\int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu')\, d\mu', \tag{2.74}$$

se consideră că soluția acestei ecuații trebuie să satisfacă condiții la margine de tip

$$\psi(0, \mu) = \delta(\mu - \mu_0), \qquad \mu, \mu_0 > 0,$$
$$\psi(x, \mu) \to 0, \qquad x \to \infty$$

Prima condiție poate fi exprimată analitic chiar în ecuația (2.74), rescriind-o sub forma

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) = h(x) \frac{c}{2}\int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu')\, d\mu', \tag{2.75}$$

unde

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

este o funcție în trepte.

Pentru a transforma Fourier ecuația (2.75), trebuie exprimată și această funcție în trepte printr-o transformată Fourier de forma

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\pi i} P\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dt}{t}\right] \tag{2.76}$$

(P înseamnă partea principală a integrării în sensul lui Cauchy).

Transformata Fourier a ecuației (2.75), în care se ține seama și de (2.76), este deci

$$(1 + iv\mu)\, \mathfrak{F}(v, \mu) = \frac{c}{4}\int_{-1}^{+1} d\mu' \left[\mathfrak{F}(v, \mu) + \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(v - t, \mu') \frac{dt}{t}\right],$$

cu

$$\mathfrak{F}(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} \psi(x, \mu)\, d\mu.$$

Această ecuație este simplificată prin împărțirea cu $(1 + iv\mu)$, prin introducerea fluxului total $\Phi(v) = \int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(v, \mu)\, d\mu$ și prin integrarea pe μ:

$$\left(y - \frac{c}{2}\right)\Phi(v) + \frac{c}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\, dt}{t - v} = \frac{\mu_0 y}{1 + iv\mu_0}, \tag{2.77}$$

unde

$$y \equiv \frac{v}{\operatorname{tg}^{-1} v}$$

În (2.77) s-a obținut deci ecuația de transport sub una dintre formele de ecuații integrale singulare ale fluxului total, ale căror metode de rezolvare sînt studiate amănunțit în [M—3].

Una dintre aceste metode de rezolvare, pe care o vom schița doar [P—1], pornește de la presupunerea că există o soluție $\Phi(v)$ a ecuației (2.77) și că deci se poate defini o funcție olomorfă pe secțiuni

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{t-z}, \tag{2.78}$$

analitică în planul complex secționat de axa reală și anulîndu-se pentru $z \to \infty$.

Dacă z se apropie de valorile reale, superior (+) sau inferior (—) semiplanului, se pot folosi formulele lui Plemejl:

$$\Psi^{\pm}(v) = \pm\frac{1}{2}\Phi(v) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{t-v} \tag{2.78'}$$

și deci

$$\Psi^{+} + \Psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{t-v},$$

$$\Psi^{+} - \Psi = \Phi(v).$$

Introducînd această funcție în ecuația (2.77) și luînd transformata Fourier inversă, se obține o nouă ecuație:

$$\psi(x,\mu) = \frac{c}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}\,\Phi(v)}{1+iv\mu}\,dv + \frac{c}{8\pi^2 i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}\,dv}{1+iv\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{v-t},$$

care conține integrale de contur ce se pot rezolva simplu, ducînd la

$$\psi(x,\mu) = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}\,\Phi(t)\,dt}{1+i\mu t} - e^{-x/\mu}\,\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t)\,dt}{1+i\mu t}, \quad \mu > 0,$$

$$\psi(x,\mu) = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}\,\Phi(t)\,dt}{1+i\mu t}, \quad \mu < 0.$$

Final, distribuția unghiulară a neutronilor este dată de

$$\psi(0,\mu) = \frac{c\mu_0}{\mu_0-\mu}\,X\left(-\frac{i}{\mu_0}\right)X\left(\frac{i}{\mu}\right), \quad \mu < 0,$$

unde

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(t)\,dt}{t - z}, \quad \gamma(v) = -\frac{c}{y} X(v).$$

În cea de-a doua variantă, exemplificată tot în aproximația monoenergetică cu împrăștiere izotropă, fără sursă și în geometrie plană, caracterizată de ecuația de transport (2.74), se consideră că soluția este bazată pe o separare a variabilelor de forma (comp. cu 1.10)

$$\psi(x, \mu) = e^{-x/\nu}\, \Phi(\nu, \mu), \tag{2.79}$$

unde ν reprezintă valorile proprii, iar $\Phi(\nu, \mu)$ funcțiile proprii corespunzătoare.

După obținerea expresiei fluxului unghiular de neutroni prin dezvoltarea în funcțiile proprii amintite, se calculează densitatea $\rho(x)$ și curentul de neutroni $j(x)$ după relațiile clasice

$$\rho(x) \equiv \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu)\, d\mu\,; \quad j(x) \equiv \int_{-1}^{+1} \mu\, \psi(x, \mu)\, d\mu,$$

care depind însă în acest caz de coeficienții dezvoltării furnizați de niște ecuații integrale singulare, care vor fi deduse.

În acest scop trebuie deduse funcțiile și valorile proprii ale ecuației (2.77) prin introducerea transformării (2.79).

Se obține

$$(\nu - \mu)\, \Phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2}\int_{-1}^{+1} \Phi(\nu, \mu')\, d\mu'. \tag{2.80}$$

Folosind condiția de normare

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\nu, \mu)\, d\mu = 1 \tag{2.81}$$

(o condiție mai generală de normare se obține prin egalarea integralei cu o funcție arbitrară $a(\nu)$ [$Z - 5$]), după care (2.80) devine

$$(\nu - \mu)\, \Phi(\nu, \mu) = \frac{c\,\nu}{2}. \tag{2.82}$$

Se observă că valorile proprii ν nu au constrîngeri și pot lua orice valori în intervalul de existență $(-1, +1)$, dar în acest caz ele introduc singularități în punctele $\nu = \mu$. Această particularitate indică o soluție generală a ecuației (2.82), de forma

$$\Phi(\nu, \mu) = \frac{c}{2} P\frac{\nu}{\nu - \mu} + \lambda(\nu)\, \delta(\mu - \nu), \tag{2.83}$$

în care $\lambda(\nu)$ se deduce din condiția de normare, iar întreg termenul secund din membrul drept contribuie doar la punctele singulare $\mu = \nu$:

$$\int_{-1}^{+1} \lambda(\nu)\, \delta(\nu - \mu)\, d\mu = \left[1 - \frac{c\nu}{2} \int \frac{d\mu}{\nu - \mu}\right] \equiv \Lambda(\nu), \tag{2.84}$$

iar P reprezintă valoarea principală (în sensul lui Cauchy) a integralelor care conțin pe $\Phi(\nu, \mu)$.

În rezolvarea ecuației de transport astfel transformate se deosebesc două cazuri, după cum ν este cuprins în intervalul de existență al variabilei unghiulare μ $(-1, +1)$ sau în afara lui.

Cazul I: $\nu \notin [-1, +1]$. Ecuația (2.83) se reduce la

$$\Phi(\nu, \mu) = \frac{c}{2} P \frac{\nu}{\nu - \mu}, \tag{2.85}$$

din care, ținînd seama de condiția de normare (2.81), se deduc valorile proprii ν din expresia rezultată:

$$1 = c\nu\, \mathrm{tgh}^{-1}\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.86}$$

Această ecuație are două rădăcini discrete pur imaginare $\pm \nu_0$ (pentru $c > 1$), cărora le corespund funcțiile proprii

$$\Phi_{0\pm}(\mu) = \frac{c}{2} \frac{\nu_0}{\nu_0 \pm \mu} \tag{2.87}$$

sau

$$\psi_{0\pm}(x, \mu) = \Phi_{0\pm}(\mu)\, e^{\pm x/\nu_0}.$$

Cazul II: $\nu \in [-1, +1]$. Ecuația (2.83) se reduce la

$$\lambda(\nu) = 1 - c\nu\, \mathrm{tgh}^{-1}\, \nu. \tag{2.88}$$

Datorită expresiei lui $\lambda(\nu)$, în acest interval există o infinitate de valori proprii formînd un continuu, cărora le corespund un continuu de soluții (funcții proprii) date de ecuația (2.83). Soluția (2.79) devine

$$\Phi_\nu(x, \mu) = \Phi(\nu, \mu)\, e^{-x/\nu}. \tag{2.89}$$

Soluția generală, care include ambele cazuri de existență a valorilor proprii ν, este deci dată de suma componentelor discontinuă și continuă

$$\psi(x, \mu) = a_{0\pm}\, \psi_{0\pm}(x, \mu) + \int_{-1}^{+1} A(\nu)\, \psi_\nu(x, \mu)\, d\nu \tag{2.90}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau explicit

$$\psi(x,\mu) = e^{-x/\nu_0}\,\Phi_{0+}(\nu_0,\mu) + e^{x/\nu_0}\,\Phi_{0-}(-\nu_0,\mu) + \int_{-1}^{+1} e^{-x/\nu}\,\Phi(\nu,\mu)\,d\nu, \quad (2.91)$$

în care $a_{0\pm}$ și $A(\nu)$ sînt coeficienții arbitrari ai dezvoltărilor în funcții proprii furnizați de ecuații integrale singulare.

Determinarea acestora este ușurată și de ortogonalitatea funcțiilor proprii singulare, exprimată de relațiile

$$\int_{-1}^{+1} \mu\,\Phi(\nu',\mu)\,\Phi(\nu,\mu)\,d\mu = \delta(\nu-\nu')\,\nu\,\Lambda^{+}(\nu)\,\Lambda^{-}(\nu), \quad (2.92)$$

unde $\Lambda^{\pm}(\nu)$ reprezintă valoarea lui Λ (2.84) cînd ν tinde spre axa reală din sus, respectiv din jos, și

$$\int_{-1}^{+1} \mu\,\Phi(\pm\nu_0,\mu)\,d\mu = \pm\frac{c\nu_0^2}{2}\left[\frac{c}{\nu_0^2-1} - \frac{1}{\nu_0^2}\right]. \quad (2.93)$$

Coeficienții arbitrari ai dezvoltării în funcțiile proprii singulare se determină impunînd condițiile la margine obișnuite

$$\begin{aligned} &\psi(x,\mu) = \psi(-x,-\mu), \\ &\psi(-b,\mu>0) = 0, \end{aligned} \quad (2.94)$$

unde b este semigrosimea plăcii în care se determină distribuția unghiulară a neutronilor. Prin introducerea soluției (2.91) în (2.94) se obțin două ecuații integrale pentru coeficienții dezvoltării $a(\nu)$ în două intervale diferite ale variabilei unghiulare μ, care sînt destul de dificil de rezolvat.

Pentru simplificarea deducerii lor se face apel la proprietățile de simetrie ale distribuției neutronice în placa respectivă, care permit să considerăm ca soluție generală doar partea simetrică, adică

$$\begin{aligned} &\psi_{0\pm}(-x,-\mu) = \psi_{0\mp}(x,\mu), \\ &\psi_{\nu}(-x,-\mu) = \psi_{-\nu}(x,\mu), \end{aligned} \quad (2.95)$$

deci

$$(a_{0+}+a_{0-})\psi_{0+}(x,\mu) + (a_{0-}-a_{0+})\,\psi_{0-}(x,\mu) + \int_{-1}^{+1}[A(\nu) - A(-\nu)]\,\psi_{\nu}(x,\mu)\,d\nu = 0. \quad (2.96)$$

Deoarece această relație trebuie să fie satisfăcută pentru orice $|x| \leqslant b$ și orice $|\mu| \leqslant 1$, rezultă și

$$a_{0+} = a_{0-} \quad ; \quad A(\nu) = A(-\nu), \quad (2.97)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\psi_{\text{simetric}}(x, \mu) = a_{0+}\left[\Phi_{0+}(\mu)\, e^{-x/\nu_0} + \Phi_{0+}(-\mu)\, e^{x/\nu_0}\right] + a_{0-}\left[\Phi_{0-}(\mu) e^{x/\nu_0} + \right.$$
$$\left. + \Phi_{0-}(-\mu)\, e^{-x/\nu_0}\right] + \int_{-1}^{+1} a(\nu)\left[\Phi_{\nu}(\mu)\, e^{-x/\nu} + \Phi_{\nu}(-\mu)\, e^{x/\nu}\right] d\nu. \quad (2.98)$$

Condițiile de simetrie precedente permit rescrierea ecuației (2.96) pentru coeficienți:

$$a_{0+}\left[\psi_{0+}(-b, \mu) + \psi_{0-}(-b, \mu)\right] + \int_{-1}^{+1} A(\nu)\, \psi_{\nu}(-b, \mu)\, d\nu = 0, \quad \mu > 0, \quad (2.99)$$

care ia forma unei ecuații integrale singulare, după o descompunere a termenului integral și ținînd seama că $A(\nu)$ și $\lambda(\nu)$ sînt funcții pare:

$$A'(\mu)\,\lambda(\mu) + P\int_0^1 \frac{(c/2)\,\nu A'(\nu)}{\nu - \mu}\, d\nu = -a\left[\Phi_{0+}(\mu) + \Phi_{0-}(\mu)\, e^{-t/\nu_0}\right] + \quad (2.100)$$
$$-\int_0^1 \frac{(c/2)\,\nu A'(\nu)\, e^{-t/\nu}}{\nu + \mu}\, d\nu, \qquad \mu > 0,$$

unde

$$A'(\nu) = A(\nu)\, e^{b/\nu}; \qquad a = a_0 + e^{b/\nu_0}.$$

Coeficientul necunoscut $A'(\nu)$ este legat de funcția Ψ (2.78) prin reformularea ei în funcție de acest coeficient:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{2}\, \frac{\nu A'(\nu)}{\nu - z}\, d\nu \quad (2.101)$$

și valoarea lui este dată de valorile la margine ale acestei funcții furnizate de formulele lui Plemejl (2.78′):

$$a\,\frac{c\nu_0}{2}\left[X(\nu_0) - e^{-t/\nu_0}\, X(-\nu_0)\right] = \int_0^1 \frac{c}{2}\,\nu\, X(-\nu)\, A'(\nu)\, e^{-t/\nu}\, d\nu, \quad (2.102)$$

unde

$$X(\nu_0) = \int_0^1 \frac{\gamma(\mu)}{\mu - z}\, d\mu.$$

Această expresie remarcabilă reprezintă o ecuație integrală de criticitate, deoarece conține legătura dintre proprietățile multiplicatoare ale unui mediu (date de c sau ν_0) și dimensiunile lui (date de t).

Rezultatele obținute în analiza precedentă ne permit să scriem expresiile căutate ale densității $\rho(x)$ și a curentului $j(x)$ de neutroni sub forma

$$\rho(x) = 2a_0 + \cos(x/|\nu_0|) + 2\int_0^1 A(\nu)\cos\left(\frac{x}{\nu}\right)d\nu, \qquad \nu_0 = i|\nu_0|, \tag{2.103}$$

$$j(x) = 2a_0 + (c-1)|\nu_0|\sin(x/|\nu_0|) + 2(c-1)\int_0^1 A(\nu)\,\nu\sin h\left(\frac{x}{\nu}\right)d\nu.$$

În expresia densității de neutroni, primul membru reprezintă chiar soluția asimptotică a ecuației clasice de difuzie în aproximația studiată, deci valorile proprii discrete cărora le corespunde această componentă a soluției generale reprezintă în noua aproximație a funcțiilor proprii singulare chiar comportarea asimptotică.

O aplicație simplă și imediată a analizei precedente o constituie determinarea distanței de extrapolare liniară d, care este exprimată în funcție de (2.103) prin

$$d \equiv \frac{\nu_0}{2}\log\left[-\frac{x(\nu_0)}{x(-\nu_0)}\right]. \tag{2.104}$$

b. Împrăștierea anizotropă

În acest caz, termenul integral din membrul drept al ecuației (2.74) are forma

$$\frac{c}{2}\sum_{k=0}^{N} b_k P_k(\mu)\int_{-1}^{+1} P_k(\mu')\,\psi(x,\mu')\,d\mu', \tag{2.105}$$

unde $P_k(\mu)\,b_k$ reprezintă dezvoltarea în armonici sferice a funcției de împrăștiere.

Efectuînd iar o separare a variabilelor prin expresia (2.79), ecuația de transport devine

$$(\nu-\mu)\,\Phi(\nu,\mu) = \frac{c\nu}{2}\sum_{k=0}^{N} b_k P_k(\mu)\int_{-1}^{+1}\Phi(\nu,\mu')\,P_k(\mu')\,d\mu'. \tag{2.106}$$

Aplicînd aceleași raționamente ca în cazul împrăștierii izotrope, se deosebesc cele două cazuri:

Cazul I: $\nu \notin [-1, +1]$. Valorile proprii sînt discrete și furnizate în număr de $2k$ valori de ecuația

$$1 - c\nu\sum_{k=0}^{N} b_k Q_k(\nu)\,h_k(\nu) = 0, \tag{2.107}$$

unde $Q_k \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_k(\mu)}{\nu - \mu} d\mu$ sînt funcții Legendre de speța a II-a, iar funcțiile proprii corespunzătoare sînt

$$\Phi(\pm \nu_k, \mu) = \frac{c}{2} \frac{\nu_k}{\nu \mp \mu} \sum_{l=0}^{N} b_l P_l(\mu) h(l)(\pm \nu_k). \qquad (2.108)$$

Cazul II: $\nu \in [-1, +1]$. Ca și în cazul izotrop, se obține un continuu de valori proprii cu funcțiile proprii corespunzătoare:

$$\Phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{\nu}{\nu - \mu} \sum_{k=0}^{N} b_k P_k(\mu) h_k(\nu) + P\Lambda(\nu)\delta(\nu - \mu). \qquad (2.109)$$

Este interesant că în acest caz unele valori proprii discrete se pot găsi înglobate în componenta continuă a valorilor proprii pentru anumite valori ale lui c și b_k.

Soluția generală în acest caz (împrăștiere anizotropă liniară) este

$$\psi(x, \mu) = \sum_{j=1}^{M} a_{+j} \Phi(\nu_j, \mu) e^{-x/\nu_j} + \sum_{j=1}^{M} a_{-j} \Phi(-\nu_j, \mu) e^{x/\nu_j} + \int_{-1}^{+1} A(\nu) \Phi(\nu, \mu) e^{-x/\nu} d\nu. \qquad (2.110)$$

c. Dependența energetică

Nu vom mai urmări în amănunt deducerea soluției ecuației de transport dependente de energie în aproximația funcțiilor proprii singulare, deoarece este analogă cu cea din cazurile prezentate, dar vom aminti că se pornește de la ecuația exprimată prin densitatea de ciocniri a neutronilor $\tilde{\psi}(x, \mu, E)$:

$$l(E)\mu \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \tilde{\psi}(x, \mu, E) = \int_{E_0}^{E} dE' \int_{-1}^{+1} d\mu' \tilde{K}(\mu, E; \mu' E',) \tilde{\psi}(x, \mu', E), \qquad (2.111)$$

unde se folosesc o serie de transformări simple de variabile și separarea lor sub forma (2.79), obținîndu-se o componentă de valori proprii discrete și alta continuă, cărora le corespund funcțiile proprii care permit formularea soluției generale:

$$\psi(x, \nu, E) = \sum_{i=1}^{\mu'} \frac{t_i d(t_i, \nu, E)}{t_i - \nu} e^{-x/t_i} + \int_{-1}^{+1} t \alpha(t, \nu, E) e^{-x/t} \frac{dt}{t - \nu} + \lambda(\nu, E) e^{x/\nu}. \qquad (2.112)$$

d) Dependența temporală

Aproximația funcțiilor proprii singulare în problemele cu dependență temporală a fost aplicată de numeroși cercetători [B—3], [Z—5] în special în experiențele neutronice cu sursă pulsată [B—5], [K—1], [K—2].

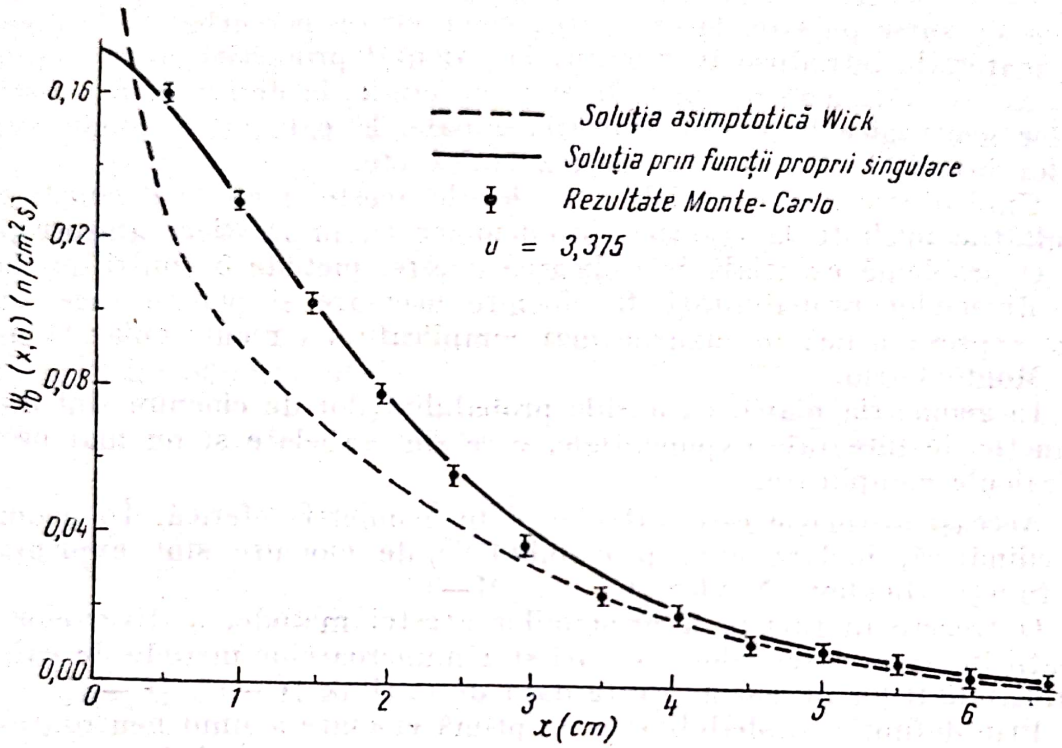


Fig. 2.4

2.3. Metoda probabilităților de ciocnire

2.3.1. Probabilități de primă ciocnire

Metoda de rezolvare a ecuației de transport pentru neutroni prin probabilități de ciocnire a cunoscut o extindere excepțională în fizica reactorilor în ultimii ani, datorită faptului că acestea reprezintă noțiuni primare referitoare la procese fizice de bază pe care neutronii le suferă în reactor.

Această metodă a permis și o dezvoltare a teoriei ecuației de transport integrale la cazuri mai complexe întîlnite în practică, prin formularea ei independent de geometrie.

Scanned with OKEN Scanner

Avantajul acestei metode, alături de toate celelalte metode bazate pe aproximații integrale ale ecuației de transport, este superioritatea ei în precizie și viteză de calcul în regiuni de dimensiuni mici comparative cu drumul liber mijlociu al neutronilor, cum sînt rețelele reactorilor eterogeni și posibilitatea de abordare mult mai comodă a geometriilor complicate.

În cazul particular al metodei probabilităților de ciocnire, aceste avantaje au permis extinderea ei la studiul distribuțiilor de flux în experiențele cu surse pulsate, la evaluarea efectelor de perturbație ale diverselor materiale introduse în reactor, la calculul protecției contra radiațiilor, al atenuării acestora prin diverse materiale, la determinarea distribuțiilor neutronice în regiuni inelare, canale, la calculul efectelor neutronilor rapizi și al absorbției la rezonanță etc.

Unul dintre dezavantajele actuale ale acestei metode îl constituie dificultățile întîlnite la tratarea problemelor cu împrăștiere anizotropă.

O problemă esențială în aplicarea acestei metode o constituie calculul diverselor probabilități de ciocnire necesare și pentru care s-au dedus expresii utile; în cazurile mai complicate s-a recurs chiar la metoda Monte Carlo.

În geometria plană, expresiile probabilităților de ciocnire sînt date în funcție de integrale exponențiale, care sînt tabelate și nu mai necesită calcule complicate.

Aceeași afirmație este valabilă și în geometria sferică. În geometria cilindrică, inelară etc., probabilitățile de ciocnire sînt exprimate prin funcții Bickley—Nayler [C—2], [M—1].

O trecere în revistă a principiilor acestei metode, a diverselor ei aplicații în fizica reactorilor nucleari și a numeroaselor metode de calcul al probabilităților de ciocnire este dată de Carlvik [C—1], [C—2].

Prin definiție, probabilitatea de primă ciocnire a unui neutron este probabilitatea pe care o are acesta de a se ciocni cu unul dintre atomii mediului în care se găsește sursa de neutroni în cursul primei traiectorii pe care o parcurge după apariția lui în fisiune sau în altă reacție nucleară. Folosirea acestor probabilități de primă ciocnire este suficientă în multe probleme practice întîlnite în fizica reactorilor în jurul surselor, în apropierea marginilor sau a interfețelor și în special în moderatori hidrogenoizi, în care efectul ciocnirilor secundare este mic comparat cu cel al primei ciocniri.

Dar în altă categorie numeroasă de probleme (moderatori cu greutate atomică mare, în regiuni mari ale reactorului etc.) este necesară luarea în considerare și a ciocnirilor secundare, ternare etc., cunoscute într-un cuvînt sub denumirea de ciocniri multiple. Probabilitățile de primă ciocnire și de ciocniri multiple vor fi analizate separat în paragrafele următoare, dar amănunte importante privitoare la aplicațiile lor vor fi întîlnite și la paragraful metodei nucleelor integrale. Pentru calculul tuturor acestor probabilități este însă necesară cunoașterea de-

pendenței unghiulare și spațiale a sursei de neutroni, iar acestea depind chiar de distribuția fluxului, care trebuie determinată prin metoda probabilității de ciocnire. De aceea se recurge la o primă aproximație privind distribuțiile unghiulară și spațială a sursei, care sînt considerate izotrope, respectiv constante într-o regiune m. Matematic, aceste proprietăți se exprimă prin

$$S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, E), \qquad S(\mathbf{r}, E) = S_m(E). \tag{2.113}$$

Ecuația integrală de transport pentru fluxul direcțional de neutroni este [M—1]

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty S(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \left\{ \exp\left[-\int_0^R \Sigma(\mathbf{r} - R'\boldsymbol{\Omega}, E)\, \mathrm{d}R' \right] \right\} \mathrm{d}R. \tag{2.113'}$$

Dacă se introduc notațiile

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - R\boldsymbol{\Omega}; \quad \mathrm{d}\mathbf{r}' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega},$$

$$\Phi(\mathbf{r}, E) = \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}, \tag{2.114}$$

$$\Phi_n(E) = \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \Phi(\mathbf{r}, E)\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

și se integrează (2.113') pe $\mathbf{r}$ și $\boldsymbol{\Omega}$, se obține o nouă formă a ecuației integrale:

$$\int_{V_n} \mathrm{d}\mathbf{r} \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = V_n \Phi_n(E) = \int_{V_n} \mathrm{d}\mathbf{r} \int_{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} S\left(\mathbf{r}', E, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{2.115}$$

în care $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)$ reprezintă „distanța optică" dintre punctele $\mathbf{r}$ și $\mathbf{r}'$ între care s-au deplasat neutronii de energie E. Trebuie subliniat faptul important că această ecuație a fost dedusă independent de geometrie și că aceasta va fi inclusă abia în calculul explicit al probabilităților de ciocnire.

Rezolvarea directă a acestei ecuații integrale este dificilă și de aceea se recurge la un artificiu, motivat atît fizic, cît și matematic, prin care este înlocuită cu un sistem de N ecuații integrale cuplate, mai simple.

Fizic, acest artificiu corespunde la împărțirea regiunii asupra căreia se extinde calculul (de obicei celula unei rețele de reactor) în N regiuni V'_m ($m = 1, 2, \ldots, N$) suficient de mici, în care secțiunea de interacțiune

nu mai posedă dependență spațială, fiind constantă: $\Sigma(\mathbf{r}, E) = \Sigma_m(E) = \text{ct}$ pentru $\mathbf{r} \in V'_m$.

Considerînd că sursele de neutroni sînt definite analog cu fluxurile de (2.114) și deoarece artificiul precedent permite înlocuirea integrării pe r pe tot volumul printr-o sumă asupra a N integrale mai simple corespunzătoare celor N volume V'_m, se poate rescrie ecuația integrală generală (2.115)

$$V_n \Sigma_n(E) \Phi_n(E) = \sum_{m=1}^{N} V_m P_{mn}(E) S_m(E) \qquad (n, m = 1, 2, \ldots, N). \quad (2.116)$$

Această formă la care a fost adusă ecuația integrală inițială este remarcabilă, deoarece singurele mărimi mai complicate ce trebuie determinate pentru a o rezolva complet sînt chiar probabilitățile de ciocnire $P_{mn}(E)$, pentru care această ecuație poate constitui și o definiție.

Explicitînd expresia acestor probabilități prin compararea ecuațiilor (2.116) și (2.115), se obține

$$P_{mn}(E) = \frac{\int_{V_n} \Sigma_n(E)\, d\mathbf{r} \int_{V_m} \frac{e^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} S\left(\mathbf{r}, E, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) d\mathbf{r}'}{\int_{V_m} d\mathbf{r}' \int_{4\pi} S(\mathbf{r}', E, \Omega)\, d\Omega}. \quad (2.117)$$

În funcție de această expresie, definiția riguroasă a probabilității de ciocnire devine: $P_{mn}(E)$ reprezintă probabilitatea pe care o are un neutron de energie E generat în regiunea m cu distribuția spațială și energetică dată de $S(\mathbf{r}, E, \Omega)$ de a suferi prima lui ciocnire în regiunea n.

În presupunerea izotropiei și constanței sursei S în regiunea m, exprimate matematic prin condițiile (2.113), expresia (2.117) a probabilității de primă ciocnire se simplifică la

$$P_{mn}(E) = \frac{\int_{V_n} \Sigma_n(E)\, d\mathbf{r} \int_{V_m} \frac{e^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}'}{V_m}. \quad (2.118)$$

Datorită proprietăților de simetrie ale integrandului de mai sus, se deduce și relația importantă în calcule practice

$$\Sigma_m(E)\, V_n\, P_{nm}(E) = \Sigma_m(E)\, V_m\, P_{mn}(E), \quad (2.119)$$

care reflectă de altfel și o simetrie a procesului fizic de interacțiune neutronică.

Cu alte cuvinte, numeroasele probleme care apar în tratarea integrală a transportului neutronilor și în care se pune problema rezolvării unor ecuații integrale se reduc la calculul acestor probabilități de primă ciocnire, dependente de geometrie.

Scanned with OKEN Scanner

O întreagă literatură de specialitate este dedicată metodelor de calcul și aplicațiilor acestor probabilități în teoria transportului și în alte probleme defizică a reactorilor și este indicată în bibliografia exhaustivă [R—1].

Termalizarea neutronilor

Ca un exemplu de aplicare al acestei aproximații va fi expusă determinarea spectrului energetic al neutronilor termici în medii eterogene [M—1] în aproximația lui Horowitz (aproximația modificată a gazului greu).

Se consideră că în procesul de termalizare a neutronilor sursele sînt constituite de împrăștieri. În acest caz, densitatea surselor $\overline{S}_m(E)$ de împrăștiere este dată de

$$\int_0^\infty \Sigma_{sm}(E' \to E;\ T_m)\,\Phi_m(E')\,\mathrm{d}E'. \tag{2.120}$$

Ecuația aproximației probabilităților de primă ciocnire (2.116) devine

$$V_n\,\Sigma_n(E)\,\Phi_n(E) = \sum_{m=1}^{N} V_m\,P_{mn}(E)\int_0^\infty \Sigma_{sm}(E' \to E;\ T_m)\,\Phi_m(E')\mathrm{d}E', \tag{2.121}$$

în care pentru termenul de împrăștiere se folosește aproximația lui Horowitz

$$\int_0^\infty \Sigma_{sm}(E' \to E;\ T_m)\,\Phi_m(E')\,\mathrm{d}E' \to \left\{\xi_m\,\Sigma_{sm}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left[g_m(E)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(EkT_m\frac{\mathrm{d}\Phi_m(E)}{\mathrm{d}E} + (E - kT_m)\Phi_m(E)\right)\right] + \Sigma_{sm}(E)\,\Phi_m(E)\right\}, \tag{2.122}$$

în care T_m este temperatura medie (în grade absolute) a neutronilor în regiunea m, Σ_{sm} secțiunea medie de împrăștiere pentru aceeași regiune, iar $g_m(E)$ o funcție care depinde de proprietățile moderatoare ale mediului. Pentru $g_m(E) = 1$ se obține modelul lui Wilkins de tratare a termalizării neutronilor.

Soluția ecuației (2.118) în aproximația (2.122) a lui Horowitz se obține cu următoarele condiții la margine impuse fluxurilor de neutroni:

$$\Phi_n(0) = 0;\ \Phi_n(E_0) = \frac{c_n}{E_0}\left(1 + \frac{2\,kT_n}{E_0}\right);\quad (n = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.123}$$

Considerînd drept necunoscută chiar paranteza mare din (2.122) și înlocuind $\Phi_n(E)$ din (2.121) cu

$$\Phi_n(E) = \psi_n(E) \frac{e^{-\frac{E}{2kT}}}{\sqrt{g_n(E)}}, \tag{2.124}$$

sistemul de ecuații integrale (2.121) se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale mai simple

$$kT_n \frac{d^2\psi_n(E)}{dE^2} - f_n(E)\psi_n(E) + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} f_{mn}(E)\psi_m(E) = 0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant E \leqslant E), \tag{2.125}$$

cu condiția ca determinantul $\mathfrak{D}$ al probabilităților de primă ciocnire din sistemul (2.121) să fie diferit de zero :

$$|\mathfrak{D}| = \begin{vmatrix} P_{11} & \dots & P_{N1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ P_{1N} & \dots & P_{NN} \end{vmatrix}. \tag{2.126}$$

Se observă că sistemul de ecuații diferențiale (2.125) astfel obținut este analog cu cel care reprezintă ecuațiile de difuzie multigrup ale neutronilor, cu singura deosebire că rolul variabilei spațiale din ecuațiile de difuzie îl joacă în noua aproximație variabila energie a neutronilor. Această analogie, pur formală, permite rezolvarea sistemului de ecuații (2.125) după metodele folosite la difuzia multigrupală a neutronilor și furnizarea directă deci a distribuției energetice a neutronilor în modelul de termalizare folosit.

Chiar dacă nu mai apar explicit în ecuația (2.125), probabilitățile de primă ciocnire nu au fost eliminate prin aceste transformări, deoarece în expresiile coeficienților

$$f_n(E) = \frac{1}{4kT_n} - \frac{1}{E}\left(1 + \frac{\Sigma_{Sn}(E)}{\Sigma_{Sn_0}\xi_n g_n(E)}\right) + \frac{[\Sigma_{an}(E) + \Sigma_{Sn}(E)]A_{nn}(E)}{|\mathfrak{D}(E)|\,\xi_n \Sigma_{Sn_0}(E) g_n(E)} + \\ - \frac{kT_n}{4}\frac{[g_n'(E)]^2}{[g_n(E)]^2} - \frac{g_n'(E)}{g_n(E)}\left(\frac{1}{2} - \frac{kT_n}{E}\right) + \frac{kT_n}{2}\frac{g_n''(E)}{g_n(E)}; \tag{2.127}$$

$$f_{mn}(E) = (-1)^{n+m+1}\frac{[\Sigma_{an}(E) + \Sigma_{Sn}(E)]}{|\mathfrak{D}(E)|\,\xi_n \Sigma_{Sn_0}(E) g_n(E)}\frac{P_{nm}(E)}{P_{mn}(E)} A_{mn}(E) \times \\ \times \sqrt{\frac{g_n(E)}{g_m(E)}} \exp\left[\frac{E}{2}\left(\frac{1}{kT_n} - \frac{1}{kT_m}\right)\right]$$

ele apar de două ori; atît direct, sub forma rapoartelor $\frac{P_{nm}}{P_{mn}}$, cît mai ales prin intermediul determinantului $A_{mn}(E)$, obținut din (2.126) prin înlocuirea reciprocă a liniei m și a coloanei n.

În concluzie, problema termalizării neutronilor, formulată integral, a fost redusă la calculul unor probabilități de ciocnire și la rezolvarea unor ecuații analoge celor de difuzie multigrup.

2.3.2. Probabilități de ciocnire multiplă

Pentru definirea acestor probabilități se folosește tot forma integrală a ecuației de transport.

Considerînd că mediul de volum V în care rezolvăm această ecuație are simetrie radială inelară (o pătură cilindrică de exemplu) curent întîlnită în practică, ecuația (2.113) se rescrie

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_s \Phi(\mathbf{r}') + \varphi_0^V(\mathbf{r}) + \varphi_0^{S_0}(\mathbf{r}) + \varphi_0^{S_i}(\mathbf{r}), \tag{2.128}$$

unde, ca și la deducerea probabilităților de primă ciocnire, s-a presupus că sursele sînt izotrope, mediul cu împrăștiere izotropă, iar secțiunile constante. $\varphi_0^V(\mathbf{r})$, $\varphi_0^{S_0}(\mathbf{r})$, $\varphi_0^{S_i}(\mathbf{r})$ reprezintă contribuțiile la $\Phi(\mathbf{r})$ ale unei surse $Q(\mathbf{r})$ din volumul V și ale curenților de neutroni j incidenți la marginile exterioară (S_0) și interioară (S_i) ale mediului. Prin urmare, ele sînt de forma

$$\begin{aligned}
\varphi_0^V(\mathbf{r}) &= \int_V \frac{e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} Q(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}', \\
\varphi_0^{S_0}(\mathbf{r}) &= \int \frac{dS_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_0}|} j\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_0}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_0}|}\right) e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_0}|}, \\
\varphi_0^{S_i}(\mathbf{r}) &= \int \frac{dS_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_i}|} j\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_i}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_i}|}\right) e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{S_i}|}.
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Pentru rezolvarea ecuației (2.128) folosim o dezvoltare a distribuției spațiale a fluxului $\Phi(\mathbf{r})$ și a contribuțiilor φ_0^i în serii Neumann de forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^V(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{S_0}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{S_i}(\mathbf{r}), \tag{2.130}$$

unde

$$\varphi_n^X(\mathbf{r}) = \Sigma_s \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} e^{-\Sigma_t|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varphi_{n-1}^X(\mathbf{r}') \quad (n>0;\ X = V, S_0, S_i). \tag{2.131}$$

După introducerea acestora în (2.128) și integrarea pe volumul V se obține sistemul de ecuații

$$C = \Sigma_t V \Phi = P_1^{VV}\left[1 + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\right)^{j-1} P_2^{VV} P_3^{VV} \dots P_j^{VV}\right]\int_V Q(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} +$$

$$+ P_1^{S_0V}\left[1 + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\right)^{j-1} P_2^{S_0V} P_3^{S_0V} \dots P_j^{S_0V}\right] S_0 \int_{2\pi} j_{S_0}(\Omega)\,d\Omega + \quad (2.132)$$

$$+ P_1^{S_iV}\left[1 + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\right)^{j-1} P_2^{S_iV} \cdot P_3^{S_iV} \dots P_j^{S_iV}\right] S_i \int_{2\pi} j_{S_i}(\Omega)\,d\Omega,$$

în care

$$P_{j+1}^{VV(SV)} = \frac{\int_V \varphi_j^{V(S)}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}\int_V \varphi_{j-1}^{V(S)}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}} \quad (2.133)$$

reprezintă probabilitatea de ciocnire multiplă a unui neutron, definită ca probabilitatea ca un neutron care a suferit j ciocniri în V să mai sufere cel puțin o ciocnire în același volum.

Sistemul de ecuații integrale (2.132) cu probabilități de ciocnire multiplă în care s-a transformat ecuația inițială de transport poate fi simplificat prin presupunerile că distribuția spațială a neutronilor ciocniți multiplu în orice generație j este constantă și că direcțiile unghiulare ale neutronilor care pătrund în volumul V printr-o suprafață (s_0 sau s_i) sînt distribuite cosinusoidal. Prima presupunere permite simplificarea sumărilor din (2.132), în timp ce a doua presupunere permite decuplarea diverselor zone spațiale din volumul V.

Deci și în acest caz ecuația integrală de transport a fost transformată, prin intermediul probabilităților de ciocnire multiplă, într-un sistem finit de ecuații integrale mai simple. După calcularea acestor probabilități și introducerea lor în sistem, acesta se transformă într-un simplu sistem de ecuații algebrice.

2.4. Metodele transformatelor integrale

În general, prin transformata integrală $\bar{f}(s)$ a unei funcții $f(x)$ se înțelege funcția definită matematic de ecuația integrală

$$\bar{f}(s) = \int_a^b f(x)\,K(s, x)\,dx = Tr_s(f), \quad (2.134)$$

în care $K(s, x)$ este nucleul integral al transformatei.

Teoretic se pot deduce orice transformate integrale prin definirea unui nucleu integral corespunzător și a unor limite de integrare adecvate, dar cele mai folosite în diverse domenii ale fizicii matematice și mai ales în domeniul ce ne interesează, al transportului neutronilor, sînt :

— transformata Fourier în sinus sau cosinus,

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \sin sx \, dx = F_s(s),$$
$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \cos sx \, dx = F_c(s); \tag{2.135}$$

— transformata Fourier complexă,

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{isx} \, dx = F_e(s); \tag{2.136}$$

— transformata Laplace,

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \, e^{-sx} \, dx = L(s); \tag{2.137}$$

— transformata Mellin,

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \, x^{s-1} \, dx = M(s); \tag{2.138}$$

— transformata Hankel (numită și transformata Fourier-Bessel),

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x) \, x \, \bar{J}_n(sx) \, dx = H(s), \tag{2.139}$$

unde $\bar{J}(sx)$ este funcția Bessel.

Valoarea limitelor de integrare este importantă, deoarece, dacă acestea sînt finite, și transformările definite de ele vor fi finite. De asemenea este necesar ca domeniul de integrare al transformatei să coincidă sau să includă domeniul variabilei pentru care se efectuează transformarea.

Un exemplu de metodă aproape mecanică cu care se pot obține transformate integrale este cel pentru o variabilă ce există în domeniul $(-1, +1)$: nucleul cel mai potrivit în acest caz este polinomul Legendre, care conduce deci la o transformată integrală Legendre

$$\bar{f}(s) = \int_{-1}^{+1} f(x) \, P_n(x) \, dx. \tag{2.140}$$

Metoda transformatelor integrale, folosită pentru prima dată în studiul unor probleme nerezolvabile clasic din teoria electromagnetismului

Scanned with OKEN Scanner

sau a căldurii de către Heaviside, are drept rezultat reducerea ecuațiilor diferențiale cu n derivate parțiale la ecuații cu $(n-1)$ derivate parțiale, teoretic și practic mai simple, precum și reducerea ecuațiilor diferențiale de grad n la cele de grad $(n-1)$ și în particular a celor de gradul întîi la ecuații algebrice și mai ales reducerea problemelor în n dimensiuni la probleme cu $(n-1)$ dimensiuni.

Se pot folosi consecutiv mai multe transformate integrale sau aceeași transformată integrală de mai multe ori, deși acest procedeu este dificil matematic.

Întrucît efectul aplicării unei transformate integrale este de a exclude temporar o variabilă independentă aleasă, trebuie efectuată o transformare inversă pentru a o recîștiga.

Inversarea se efectuează asupra soluției obținute pentru cele $(n-1)$ variabile rămase, iar cea de-a n variabilă este reprezentată de soluția ecuației integrale care definește transformarea. Unul dintre avantajele deosebite ale metodei transformatelor integrale îl constituie faptul că acestea, ca și inversele lor, se pot calcula o dată pentru totdeauna și pot fi tabelate pentru a fi folosite direct. Pentru transformatele integrale definite mai sus se calculează transformatele inverse:

— transformata inversă Fourier (în sinus sau în cosinus),

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{f}(s) \sin sx \, ds = \overline{F}_s(s),$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{f}(s) \cos sx ds = \overline{F}_c(s); \tag{2.141}$$

— transformata inversă Fourier complexă,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(s) \, e^{-isx} \, ds = \overline{F}_c(s); \tag{2.142}$$

— transformata inversă Laplace,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) \, e^{xs} \, ds = \overline{L}(s); \tag{2.143}$$

— transformata inversă Mellin

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) \, x^{-s} \, ds = \overline{M}(s); \tag{2.144}$$

— transformata inversă Hankel,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \bar{f}(s) \, s \, J_n(x, s) \, ds = \overline{H}(s). \tag{2.145}$$

Scanned with OKEN Scanner

După cum se observă, la inversarea transformatelor Laplace și Mellin apar integrale de contur, care ridică probleme mai dificile la rezolvare. Practic, pentru rezolvarea unei ecuații diferențiale prin metoda transformatelor integrale se înmulțește această ecuație și condițiile la margine cu transformata integrală aleasă. Condițiile la margine sau inițiale devin în acest mod limite de integrare ale transformatei integrale. Prin integrarea ecuației transformate se obține o anumită soluție, căreia i se aplică transformata inversă, furnizînd astfel soluția finală căutată.

Fiecare tip de transformare integrală se aplică optim la un anumit tip de probleme.

Astfel, transformatele Fourier se iau de obicei față de variabile spațiale, cu condiția ca funcțiile respective să satisfacă condiții Dirichlet, în timp ce transformata Laplace se ia față de variabila temporală în ecuația cinetică de transport al neutronilor, transformînd-o în ecuația staționară, mai simplă de rezolvat.

Transformatele Mellin se folosesc în probleme analoge cu cele care impun utilizarea transformatelor Fourier, în timp ce transformatele Hankel sînt preferate ori de cîte ori abordăm probleme cu simetrie axială (deci cu folosirea coordonatelor polare), des întîlnite în fizica reactorilor nucleari.

Este important de subliniat că transformatele Fourier în sinus sau în cosinus nu elimină din ecuațiile diferențiale derivatele de ordin impar $\left(\text{ca } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ sau } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)$, ci doar par, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} \text{ etc.}\right)$, în timp ce transformatele Laplace permit eliminarea termenilor de orice grad $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ etc.}\right)$. De asemenea, transformatele Hankel permit eliminarea din ecuațiile diferențiale a unor termeni complecși, ca $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \left(\frac{n^2 f}{r^2}\right)$, iar transformatele Legendre elimină termeni de forma $\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}\right]$.

În cele ce urmează vom rezuma cîteva dintre proprietățile transformatelor Fourier și Laplace.

1. sînt liniare

2. $\mathrm{F}\,[f'(x)] = ix\,\mathrm{F}\,[f(x)]$,

$\mathrm{L}\,[f'(x)] = s\,\mathrm{L}\,[f(x)] - f(0)$,

$\mathrm{L}\,[f''(x)] = s^2\,\mathrm{L}\,[f(x)] - sf(0) - f'(0)$.

3. $$\mathrm{F}\,[f(x+a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-a)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}as}\,\mathrm{F}\,[f(x)],$$
$$\mathrm{L}\,[f(x+a)] = \int_0^{\infty} f(x+a)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(x-a)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{as}\left\{\mathrm{L}\,[f(x)] - \int_0^a f(x)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x\right\},$$
$$\mathrm{L}\,[f(x-a) = \int_0^{\infty} f(x-a)\,\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-s(x+a)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{-as}\,\mathrm{L}\,[f(x)]; \quad a > 0.$$

4. $$\mathrm{F}\,[\mathrm{e}^{\alpha x} f(x);\ s] = \mathrm{F}\,[f(x);\ s + \mathrm{i}\alpha],$$
$$\mathrm{L}\,[\mathrm{e}^{\alpha x} f(x);\ s] = \mathrm{L}\,[f(x);\ s - \alpha],$$
$$\mathrm{F}[x\,f(x)] = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{F}\,[f(x)],$$
$$\mathrm{L}[x\,f(x)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{L}\,[f(x)].$$

5. $$\mathrm{F}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{F}\,[f(x)]}{\mathrm{i}s} + c\,\delta(s),$$
$$\mathrm{L}\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-sx}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\int_t^{\infty} \mathrm{d}x f(t)\,\mathrm{e}^{-sx} =$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\,\mathrm{L}\,[f(t)].$$

În privința transformatei integrale a produsului unor funcții arbitrare sau necunoscute, trebuie subliniat că aceasta nu se poate obține simplu din transformatele integrale ale funcțiilor individuale și deci la folosirea metodei trebuie să ne convingem întîi că coeficienții problemei studiate sînt independenți sau sînt măcar funcții elementare de variabila aleasă pentru transformare.

În cele ce urmează vor fi expuse cîteva dintre aplicațiile metodei transformatelor integrale la determinarea distribuției spațiale și energetice a neutronilor, la problema Milne cu împrăștiere izotropă, la multiplicarea neutronilor și la studiul termalizării lor, urmînd ca aplicațiile

transformatelor integrale la nucleele integrale să fie expuse în paragraful următor. De asemenea nu vor fi expuse în acest paragraf metodele indirecte prin care utilizarea transformatelor integrale au condus la perfecționări ale aproximațiilor clasice polinomiale, ca cea a necorelării (§ 1.1.7) sau aproximația P_∞ (§ 1.1.5).

Un exemplu de tratare a ecuației de transport a neutronilor prin folosirea transformatei Fourier din care rezultă avantajele acestei metode a fost dat în [T—2] pentru mediu infinit omogen cu sursă plană localizată la $x = 0$.

Ecuația Boltzmann descriind acest caz are forma

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \Sigma \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)\, d\mu + \frac{\delta(x)}{4\pi}. \quad (2.146)$$

Transformata Fourier $\overline{\Phi}(\tau, \mu)$ a fluxului direcțional de neutroni $\Phi(x, \mu)$ este definită ca de obicei prin

$$\overline{\Phi}(\tau, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \mu)\, e^{-i\tau x}\, dx. \quad (2.147)$$

Din forma acestei transformate se deduce ușor un mod de a transforma Fourier și ecuația (2.146), multiplicînd-o cu $e^{-i\tau x}$ și integrînd pe x. Ecuația transformată Fourier care se obține are forma

$$(\Sigma + i\tau\mu)\, \overline{\Phi}(\tau, \mu) = \frac{c}{2} \Sigma \int_{-1}^{+1} \overline{\Phi}(\tau, \mu)\, d\mu + \frac{1}{4\pi}. \quad (2.148)$$

La rezolvarea acestei ecuații, care este mai simplă decît ecuația inițială de transport, observația că membrul drept nu depinde de μ și deci este o funcție de τ, pe care o notăm $\overline{\Phi}_0(\tau)$, este de mare folos, deoarece permite scrierea imediată a soluției căutate sub forma

$$\overline{\Phi}(\tau, \mu) = \frac{\overline{\Phi}_0(\tau)}{(\Sigma + i\tau\mu)}. \quad (2.149)$$

Pentru a obține și expresia lui $\overline{\Phi}_0(\tau)$ e suficient a introduce soluția (2.149) în ecuația (2.148) peutru a avea

$$\overline{\Phi}_0(\tau) = \frac{c}{2} \Sigma \overline{\Phi}_0(\tau) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma + i\tau\mu} + \frac{1}{4\pi} = \frac{c}{2} \Sigma \overline{\Phi}_0(\tau) \left(\frac{1}{i\tau}\right) \log\left(\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau}\right) + \frac{1}{4\pi}. \quad (2.150)$$

în care $\frac{1}{2i} \log\left(\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{\Sigma}\right)$ este real și deci

$$\overline{\Phi}_0(\tau) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left[1 - \left(\frac{c\Sigma}{\tau}\right) \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\tau}{\Sigma}\right)\right]^{-1}. \quad (2.151)$$

Scanned with OKEN Scanner

Distribuția neutronilor $\Phi(x, \mu)$ se obține acum din soluția Fourier printr-o transformare inversă, care furnizează soluția căutată a ecuației de transport

$$\Phi(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Phi}(\tau, \mu)\, e^{i\tau x}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau x}[\Sigma + i\tau\mu]^{-1}\left[1 - \frac{c\Sigma}{2i\tau}\log\left(\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau}\right)\right]^{-1} d\tau. \qquad (2.152)$$

Prin integrare pe μ a fluxului direcțional se obține și fluxul total de neutroni:

$$\Phi(x) = 2\pi\int_{-1}^{+1} \Phi(x,\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\tau}\log\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau}\left[1 - \frac{c\Sigma}{2i\tau}\log\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau}\right]^{-1} e^{i\tau x}\, d\tau. \qquad (2.153)$$

Această integrare implică însă unele dificultăți, datorite componentei din planul complex, care sînt însă ocolite printr-o alegere adecvată a conturului de integrare (vezi fig. 2.5).

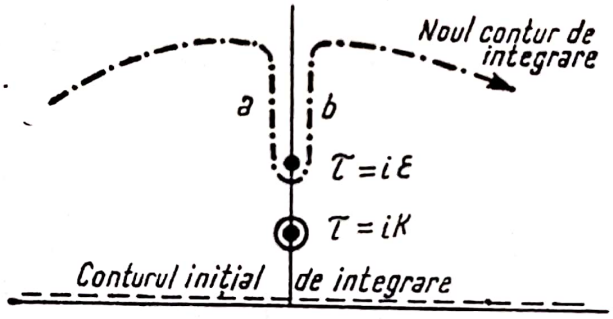


Fig. 2.5

În ecuația (2.153) există un singur pol (pentru care numitorul se anulează), dat de

$$c\,\Sigma\log\frac{\Sigma + i\tau}{\Sigma - i\tau} = 2i\tau. \qquad (2.154)$$

În funcție de valorile lui c se deosebesc cazurile $c < 1$ și $c > 1$.

Urmînd această cale de integrare, se obține rezultatul important că soluția ecuației (2.153) este formată din două componente: una asimptotică (de forma e^{-kx}), care provine din calculul reziduului în punctul $\tau = ik$, și alta tranzitorie, care provine din integrarea pe conturul deformat.

Pentru $c < 1$, polii ecuației (2.153) sînt situați în punctele $\tau = \pm ik$, unde k este dat de cunoscuta relație

$$\frac{\Sigma}{k} = \operatorname{tgh}\left(\frac{k}{c\Sigma}\right), \begin{cases} \text{pentru } c < 1 \to k \text{ real,} \\ \text{pentru } c > 1 \to k \text{ imaginar (pentru materiale fisionabile).} \end{cases} \quad (2.155)$$

Ecuația (2.153) prezintă o singularitate de forma ($\log z$) în punctul $\tau = +i\Sigma$, care este ocolit de noul contur de integrare.

Calculul reziduului pentru $\tau = ik$ conduce la

$$\frac{k\,(\Sigma^2 - k^2)\,\exp(-kx)}{c\,\Sigma\,[k^2 - \Sigma^2\,(1-c)]} \quad (2.156)$$

și, prin urmare, componenta asimptotică a soluției va fi dată de

$$\Phi_{as}(x) = \frac{A}{2\,kB}\,e^{(-k|x|)}, \quad (2.157)$$

unde $A = \dfrac{2\,(1-c)}{c}\,\dfrac{\Sigma^2 - k^2}{[k^2 - \Sigma^2(1-c)]}$ și $B = \dfrac{(1-c)\,\Sigma}{k^2}$.

Efectuînd un calcul analog și pentru conturul deformat, se obține componenta tranzitorie ca sumă a două integrale evaluate pe porțiunea din stînga (a), respectiv din dreapta (b) a axei imaginare :

$$\Phi_{tr}(x) = \int_0^\infty \frac{2\,\Sigma^2\,(\eta+1)\exp[-(\eta+1)\,\Sigma|x|]\,d\eta}{[2\,\Sigma\,(\eta+1) - c\,\Sigma\log(2\,\eta^{-1}+1)]^2 + \pi^2 c^2 \Sigma^2}. \quad (2.158)$$

Pentru valori mici ale lui x (la care contribuția importantă provine de la valorile mari ale lui η), expresia precedentă poate fi aproximată prin

$$\int_0^\infty \frac{\exp[-(\eta+1)|x|\,\Sigma]\,d\eta}{2\,(\eta+1)} = \frac{1}{2}E_1(\Sigma|x|), \quad (2.159)$$

care reprezintă chiar distribuția neutronilor „virgini" ce nu au suferit încă ciocniri.

O tratare organizată și cuprinzătoare a multor probleme din teoria transportului prin metodele transformatelor integrale, cu accent pe folosirea transformatei Fourier, este prezentată în lucrarea, devenită clasică, a lui Sneddon [S—1].

În această lucrare sînt abordate probleme ca distribuția energetică și cea spațială a neutronilor încetiniți, problema Milne pentru semispațiu cu împrăștiere izotropă, cărora li se găsesc soluțiile exacte, multiplicarea neutronilor în medii cu surse și fără surse, densitatea neutronilor furnizați de surse de neutroni rapizi, problema încetinirii tratată prin aproximația vîrstei atît în prezența, cît și în absența capturii neutronilor și a variațiilor temporale.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.4.1. Distribuția energetică a neutronilor încetiniți (în termalizare)

Ecuația de transport dependentă de timp în funcție de distribuția generalizată a neutronilor $N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)$ este

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)}{\partial t} + v \operatorname{grad} N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t) =$$

$$= \int_0^u du' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{v' N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t)}{\lambda_s(u')} f(\mu_0, u \to u') + \frac{v N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)}{\lambda(u)} + S(\mathbf{r}, u, t), \tag{2.160}$$

unde $\lambda^{-1}(u) = \lambda_c^{-1}(u) + \lambda_s^{-1}(u)$ este drumul liber mijlociu total al neutronilor (c și s sînt indici pentru captură și împrăștiere), iar $f(\mu_0, u \to u')$ este funcția de împrăștiere, a cărei expresie se determină ușor din aplicarea legilor de conservare a energiei și momentului :

$$f(\mu_0, u) = \begin{cases} \dfrac{(M+1)^2}{8\pi M} \delta\left[\mu_0 - \dfrac{M+1}{2} e^{-\frac{u}{2}} + \dfrac{M-1}{2} e^{\frac{u}{2}}\right] & \text{pentru } 0 \leqslant u \leqslant q_M, \\ 0 & \text{pentru } u > q_M, \end{cases}$$

unde $q_M = \log\left(\dfrac{M+1}{M-1}\right)^2$ și reprezintă pierderea maximă logaritmică de energie la împrăștierea neutronilor, care se reduce pentru $d\Omega_0 = 2\pi d\mu_0$ la expresia simplificată

$$f_0(u) = \begin{cases} \dfrac{(M+1)^2}{4M} e^{-u} & u \leqslant q_M, \\ 0 & u > q_M. \end{cases}$$

Înlocuind distribuția generalizată $N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)$ prin fluxul generalizat $\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)$ dat de

$$\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t) = \frac{v}{\lambda(u)} N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)$$

și v prin $v\boldsymbol{\Omega}$, ecuația (2.160) se reduce la

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} \psi + \lambda^{-1}(u) \psi =$$

$$= \lambda^{-1}(u) \int_0^u du' \int d\boldsymbol{\Omega}\, h(u')\, \psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t) f(\mu_0, u \to u')\, S(\mathbf{r}, u, t), \tag{2.161}$$

unde $h(u) = \lambda(u) / \lambda_s(u)$.

Se poate considera că sursa $S(\mathbf{r}, u, t)$ poate totdeauna fi adusă la forma mai comodă pentru calcule

$$S(\mathbf{r}, u, t) = Q(\mathbf{r})\,\delta(u)\,\delta(t), \tag{2.162}$$

datorită proprietății cunoscute a soluției ecuației (2.161) de a fi formată prin suprapunerea unor soluții ale aceleiași ecuații cu surse cu distribuții arbitrare în u și în t.

Neglijînd deocamdată dependența spațială de $\mathbf{r}$ și Ω prin înlocuirile

$$\begin{aligned} \psi_0(u, t) &= \int d\mathbf{r} \int d\Omega\, \psi(\mathbf{r}, \Omega, u, t), \\ f_0(u - u') &= \int f_0(\mu_0, u - u')\, d\Omega_0, \\ Q &= \int Q(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\, d\Omega, \end{aligned} \tag{2.163}$$

ecuația de transport (2.161) devine

$$\frac{\lambda(u)}{v}\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \psi_0 - Q\,\delta(u)\,\delta(t) = \int_0^u \psi_0(u', t)\, h(u')\, f_0(u - u')\, du', \tag{2.164}$$

cu ajutorul căreia vom studia, prin metoda transformatelor integrale, cazurile staționar și dependent de timp, ambele fără captură.

a) Cazul staționar fără captură

Întrucît în acest caz $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ și $h = 1$ pentru sursa monoenergetică de neutroni, ecuația de transport (2.164) se reduce la

$$\psi_0(u) = \int_0^u \psi_0(u')\, f_0(u - u')\, du' + \delta(u). \tag{2.165}$$

Folosind transformatele Laplace ale fluxului și funcției de împrăștiere:

$$\begin{aligned} \Phi_0(p) &= \int_0^\infty \psi_0(u)\, e^{-pu}\, du, \\ F_0(p) &= \int_0^\infty f_0(u)\, e^{-pu}\, du, \end{aligned} \tag{2.166}$$

obținem transformata Laplace a ecuației de transport

$$\int_0^u \psi_0(u')\, f_0(u - u')\, du' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Phi_0(p)\, F_0(p)\, e^{pu}\, dp. \tag{2.167}$$

Întrucît în teoria transformatelor Laplace există o teoremă care afirmă că

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} e^{px}\,\Phi(p)\,dp = f(x), \tag{2.168}$$

obținem direct din ecuația (2.167) rezultatul

$$\int_0^\infty e^{-pu}\,du\int_0^u \psi_0(u')\,f_0(u-u')\,du' = \Phi_0(p)\,F_0(p). \tag{2.169}$$

Aplicînd această teoremă și ecuației (2.166) prin înmulțirea ambilor membri cu e^{-pu} și integrînd pe u în intervalul $[0, \infty]$, se obține

$$\Phi_0(p) = \Phi_0(p)\,F_0(p) + 1 \tag{2.170}$$

sau, explicitînd,

$$\Phi_0(p) = 1 + \frac{F_0(p)}{1 - F_0(p)}. \tag{2.171}$$

Transformata inversă Laplace a lui (2.171), este conform ecuațiilor (2.166),

$$\psi_0(u) = \delta(u) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F_0(p)}{1-F_0(p)}e^{pu}\,dp, \tag{2.172}$$

în care trebuie explicitată și expresia lui

$$F_0(p) = \int_0^{q_M}\alpha\,e^{-(1+p)u}\,du = \frac{\alpha}{1+p}[1 - e^{-(1+p)q_M}],\ \alpha = \frac{(M+1)^2}{4M}, \tag{2.173}$$

$$\frac{F_0(p)}{1-F_0(p)} = \frac{1-e^{-(1+p)q_M}}{\frac{p+1}{\alpha} - [1-e^{-(1+p)q_M}]} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}. \tag{2.174}$$

Datorită acestei expresii, polii integralei din (2.172) sînt dați de rădăcinile p_i ale ecuației obținute prin anularea numitorului din (2.174), ceea ce permite scrierea transformatei sub forma

$$\psi_0(u) = \delta(u) + \sum_{p_i}\frac{(p_i+1)\,e^{p_i u}}{1 + q_M(p_i - \alpha + 1)}$$

sau

$$\psi_0(u) = \delta(u) + \frac{1}{1+q_M(1-\alpha)} + \sum_{p_i}\frac{(p_i+1)\,e^{p_i u}}{1+q_M(p_i-\alpha+1)}. \tag{2.175}$$

Soluția finală $\psi_0(u)$ a distribuției energetice a neutronilor se poate obține în funcție de soluția asimptotică ψ_{as} valabilă pentru $u \to \infty$:

$$\psi_0(u) \to \psi_{as}(u) = \frac{1}{1 + q_M(1-\alpha)},$$

$$\frac{\psi_0(u) - \psi_{as}(u)}{\psi_{as}(u)} = \sum_{p_i} \frac{1 + q_M(1-\alpha)}{1 + q_M(p_i - \alpha + 1)} (p_i + 1)\, e^{p_i u}. \qquad (2.176)$$

b) Cazul dependent de timp fără captură

În acest caz, ecuația (2.164) se simplifică, deoarece $h(u') = 1$ și, prin introducerea transformatei Laplace,

$$\Phi_0(u, s) = \int_0^\infty \psi_0(u, t)\, e^{-st}\, dt \qquad (2.177)$$

devine

$$\left[1 + \frac{s\lambda(u)}{v}\right] \Phi_0(u, s) = \int_0^u \Phi_0(u', s)\, e^{-(u-u')}\, du' + Q\delta(u). \qquad (2.178)$$

Soluția ecuației transformate se obține mai ușor după o schimbare de variabilă de forma

$$\Phi_0(u, s) = \frac{Q\delta(u)}{1 + \frac{s\lambda(0)}{v(0)}} + \chi(u, s) \qquad (2.179)$$

și ținînd seama de identitatea

$$\frac{f(u)}{f(0)}\delta(u) \equiv \delta(u), \qquad (2.180)$$

ecuația (2.178) ia noua formă:

$$\left[1 + \frac{s\lambda(u)}{v(u)}\right]\chi(u, s) = \int_0^u \chi(u', s)\, e^{-(u-u')}\, du' + \frac{Q\, e^{-u}}{1 + s\lambda_0/v_0}. \qquad (2.181)$$

Soluția acestei ecuații se obține prin derivarea ei în funcție de u:

$$\frac{d}{du}\left[\left(1 + \frac{s\lambda(u)}{v(u)}\chi(u, s)\right] = \chi(u, s) - \int_0^u \chi(u', s)\, e^{-(u-u')}\, du' - \frac{Qe^{-u}}{1 + s\lambda_0/v_0} =$$

$$= -\frac{s}{s + v(u)/\lambda(u)}\left[\left(1 + \frac{s\,\lambda(u)}{v(u)}\right)\chi(u, s)\right], \qquad (2.182)$$

din care

$$\chi(u, s) = \frac{Q}{(1 + s\lambda_0/v_0)\,[1 + s\lambda(u)/v(u)]} \exp\left[-s\int_0^u \frac{du'}{s + v(u')/L(u')}\right], \tag{2.183}$$

unde s-a ținut seama și de condiția

$$\chi(0, s) = \frac{Q}{(1 + s\lambda_0/v_0)^2} \tag{2.184}$$

Soluția problemei studiate, adică distribuția energetică a neutronilor încetiniți în cazul dependent de timp fără captură, se obține acum ușor, efectuînd transformarea inversă a lui $\chi(u, s)$, dat de (2.183):

$$\psi_0(u, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left[\frac{Q\,\delta(u)}{1 + s\,\lambda_0/v_0} + \chi(u, s)\right] e^{st}\,ds =$$

$$= Q\,\frac{v_0}{\lambda_0}\,e^{-v_0 t/\lambda_0}\,\delta(u) + \frac{Q}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\exp s\left[t - \int_0^u \frac{du'}{s + v(u')/L(u')}\right]}{[1 + s + \lambda(u)/v(u)]\,[1 + s\lambda_0/v_0]}\cdot \tag{2.185}$$

În cazul hidrogenului ($M = 1$) și considerînd că drumul liber mijlociu de împrăștiere variază ca și viteza, rezultă că secțiunea de împrăștiere este o secțiune „$1/v$" și deci $\frac{\lambda(u)}{v(u)} = \frac{\lambda_0}{v_0}$. Aceste noi condiții permit scrierea ecuației (2.185) sub forma

$$\psi_0(u, t) = \frac{Qv}{\lambda}\,e^{-vt/\lambda}\,\delta(u) + Q\,e^{-u-vt/\lambda}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty}\exp\left(\frac{\sigma v\,t}{\lambda} + \frac{u}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2}\cdot \tag{2.186}$$

Folosind un rezultat cunoscut din teoria funcțiilor Bessel și al transformatelor Laplace, după care

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty}\exp\left(pt + \frac{\alpha^2}{p}\right)\frac{dp}{p^{\gamma+1}} = \left(\frac{t}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}\nu} I_\nu(2\,\alpha t^{1/2}), \tag{2.187}$$

unde $I_\nu(z)$ este funcția Bessel de speța I de ordin ν cu argument imaginar, soluția (2.186) ia forma finală explicită

$$\psi_0(u, t) = \frac{Qv}{\lambda}\,e^{-vt/\lambda}\,\delta(u) + Q\left(\frac{v}{\lambda}\right)\left(\frac{vt}{u\lambda}\right)^{1/2} I_1\left[2\left(\frac{vut}{\lambda}\right)^{1/2}\right] e^{-u-vt/\lambda}, \tag{2.188}$$

care reprezintă un rezultat mai corect și mai ușor obținut decît prin metodele clasice de aproximare a ecuației de transport.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul elementelor grele ($M > 1$), în care putem considera că drumul liber mijlociu este constant, ecuația (2.178) se poate scrie

$$\left(1 + \frac{s\lambda_0}{v}\right) \Phi_0 (u, s) = \frac{(M+1)^2}{4M} \int_{u-q_M}^{u} \Phi_0 (u', s)\, e^{-(u-u')}\, du' + \delta (u). \quad (2.189)$$

Şi aici, pentru simplificare, vom considera $u > q_M$, pentru care $\delta (u) = 0$, şi introducem o nouă variabilă, $w = \frac{s\lambda_0}{v_0}$.

Drept rezultat al acestor schimbări, ecuația (2.189) devine

$$\Phi (w, s) = \frac{2}{w^2 (1 - r^2)} \int_{r_w}^{w} \frac{w' \Phi (w', s)}{(1 + w')}\, dw' \quad (2.190)$$

deoarece $$(u - u') = \log E'/E = 2 \log \left(\frac{v'}{v}\right) = 2 \log \left(\frac{w}{w'}\right),$$

$$\Phi (w, s) = (1 + w)\, \Phi_0 (u, s), \quad (2.191)$$

$$r = \frac{M-1}{M+1}.$$

Considerînd că soluția ecuației (2.190) este de forma

$$\Phi (w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s)\, w^n \quad (2.192)$$

şi introducînd-o în ecuația respectivă, se obțin condițiile necesare pentru ca (2.190) să fie o astfel de soluție:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \sum_{j=n}^{\infty} (-1)^j \lambda_j w^j, \quad (2.193)$$

$$\lambda_j = \frac{2 (1 - r^{j+2})}{(j+2)(1 - r^2)}, \quad (2.194)$$

$$a_p = (-1)^p \lambda_p \sum_{n=0}^{p} (-1)^n a_n. \quad (2.195)$$

Întrucît relația (2.195) arată că a_0 poate fi ales arbitrar se ia

$$a_j = (-1)^j \frac{\lambda_j}{\prod_{i=1}^{j} (1 - \lambda_i)}, \quad j \geqslant 1. \quad (2.196)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de legătura (2.191) între $\Phi(w, s)$ și $\Phi_0(u, s)$, obținem final, după transformarea inversă,

$$\psi_0(n, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} a_n(s) \frac{w^n}{1+w} e^{st} ds \right]. \tag{2.197}$$

Integrarea acestei ecuații, care este deosebit de dificilă, se efectuează aproximativ prin definirea unei medii $\bar{x} = vt/\lambda_e$ și a unei funcții generatoare $F(x)$.

$$F(x) \simeq e^{-x} x^{2/(1-r^2)}; \quad F_{aprox}(x) = A e^{-(x+b/x)} x^{2/(1-r^2)}. \tag{2.198}$$

A se obține prin normalizarea lui $F_{aprox}(x)$, iar b este dat de minimul lui

$$\bar{x}^n = (-1)^n \left[\frac{\partial}{\partial s^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(s) w^j}{1+w} \right]_{s=0} = \frac{\int_0^{\infty} x^n \psi_0(u, t) dt}{\int_0^{\infty} \psi_0(u, t) dt}$$

$$= n! \prod_{j=1}^{n} (1 - \lambda_j)^{-1}. \tag{2.199}$$

§ 2.4.2. Încetinirea neutronilor (termalizarea)

Una dintre aproximațiile cele mai folosite în studiul matematic al termalizării încetinirii neutronilor se bazează pe teoria „vîrstei".

În cadrul acestei aproximații se definesc mărimi importante pentru procesul de încetinire a neutronilor în reactor și deci pentru funcționarea acestuia, ca densitatea de încetinire, „vîrsta" neutronilor, lungimea de încetinire etc.

Pentru a obține ecuația caracteristică a „vîrstei" în cadrul acestei teorii, se pornește de la ecuația integro-diferențială a transportului neutronilor, pe care, pentru comoditatea demonstrației, o considerăm în cazul independent de timp, monodimensional și fără captură:

$$\lambda(u) \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = \int_0^u du' \int d\Omega' \psi(z, u', \mu') f(\mu_0, u \to u') + S(z, u). \tag{2.200}$$

Dezvoltînd funcțiile de distribuție și de împrăștiere ale neutronilor ψ și f în armonici sferice

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \psi_n(z, u) P_n(\mu)$$

$$f = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) f_n(u) P_n(\mu), \tag{2.201}$$

unde

$$\psi_n = \int P_n(\mu)\,\psi(x, \mu, u)\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$f_n = \int P_n(\mu)\,f(\mu, u)\,\mathrm{d}\Omega, \tag{2.202}$$

putem exprima cele două funcții (de distribuție și de împrăștiere a neutronilor) prin suma primilor doi termeni din dezvoltările (2.201), deoarece considerăm cazul izotrop

$$\psi(z, \mu, u) = \frac{1}{4\pi}[\psi_0(z, u) + 3\,\mu\,\psi_1(z, \mu)],$$
$$f(\mu, u) = \frac{1}{4\pi}[f_0 + 3\,\mu f_1], \tag{2.203}$$

unde

$$\psi_0(z, u) = \int \psi(z, \mu, u)\,\mathrm{d}\Omega;\ \psi_1(z, u) = \int \mu\,\psi(z, \mu, u)\,\mathrm{d}\Omega,$$
$$f_0 = \int f(\mu, u)\,\mathrm{d}\Omega;\ f_1 = \int \mu f(\mu, u)\,\mathrm{d}\Omega. \tag{2.204}$$

Prin introducerea acestor dezvoltări în (2.200) și prin integrarea pe μ, se obține

$$\lambda(u)\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \psi_0(z, u) = \int_0^u \psi_0(z, u')\,f_0(u - u')\,\mathrm{d}u' + 4\,\pi\,S. \tag{2.205}$$

O ecuație diferită, utilă de asemenea în obținerea rezultatelor căutate, se obține prin multiplicarea ecuației (2.205) cu μ și integrare pe μ:

$$\frac{1}{3}\,\lambda(u)\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \psi_1(z, u) = \int_0^u \psi_1(z, u')\,f_1(u - u')\,\mathrm{d}u'. \tag{2.206}$$

Una dintre presupunerile care conduc la aproximația vîrstei este aceea că variația funcțiilor ψ_0 și ψ_1 cu u' este lentă, ceea ce permite exprimarea lor sub forma

$$\psi_0(z, u') = \psi_0(z, u) - (u - u')\frac{\partial \psi_0(z, u)}{\partial u}, \tag{2.207}$$
$$\psi_1(z, u') = \psi_1(z, u);\quad \psi_1 \ll \psi_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste înlocuiri, ecuațiile (2.205) și (2.206) devin

$$\lambda(u)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\psi_0=\psi_0\int_{u-q_M}^{u}f_0(u-u')\,du'+4\pi S(z,u)-$$
$$-\frac{\partial\psi_0}{\partial u}\int_{u-q_M}^{u}(u-u')f_0(u-u')\,du', \tag{2.208}$$

$$\frac{1}{3}\lambda(u)\frac{\partial\psi_0}{\partial z}+\psi_1=\psi_1\int_{u-q_M}^{u}f_1(u-u')\,du'. \tag{2.209}$$

Dar din condiția de normare a funcției de împrăștiere

$$\int d\Omega\int f(\mu_0,u-u')\,du'=1 \tag{2.210}$$

și din definițiile pierderii logaritmice medii de energie ξ și a cosinusului mediu al unghiului de ciocnire $\bar{\mu}$:

$$\xi=\int_0^{q_M}u\,du\int f(\mu_0,u)\,d\Omega_0=1-\frac{(M+1)^2}{4M}q_M e^{-q_M} \tag{2.211}$$

$$\bar{\mu}=\overline{\cos\theta}=\int_0^{q_M}\mu_0 f(\mu_0,u)\,d\Omega_0=\frac{2}{3M}, \tag{2.212}$$

deducem o serie de relații deosebit de utile în rezolvarea ecuațiilor (2.208) și (2.209):

$$\int_{u-q_M}^{u}f_0(u-u')\,du'=1,$$
$$\int_{u-q_M}^{u}(u-u')f_0(u-u')\,du'=\xi, \tag{2.213}$$
$$\int_{u-q_M}^{u}f_1(u-u')\,du'=\overline{\cos\theta},$$

care le reduc la ecuațiile

$$\lambda(u)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}=-\xi\frac{\partial\psi_0}{\partial u}+4\pi S(z,u), \tag{2.214}$$

$$\psi_1=-\frac{\lambda(u)}{3[1-\overline{\cos\theta}]}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}. \tag{2.215}$$

Aceste două ecuații sînt echivalente cu o singură ecuație diferențială cu derivate parțiale, de forma

$$\frac{\partial \chi(z, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \chi(z, \theta)}{\partial z^2} + T(z, \theta), \tag{2.216}$$

numită ecuația „vîrstei" dacă se definește o „vîrstă" θ prin

$$\theta \equiv \frac{1}{3} \int_0^u \frac{\lambda^2(u')\, du'}{\xi [1 - \overline{\cos \theta}]} \tag{2.217}$$

și o funcție „sursă" prin

$$T(z, \theta) \equiv 4 \pi S(z, u) \frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2.218}$$

Întrucît prin definiție $\chi(z, \theta) = \xi \psi_0(z, u)$, această nouă mărime reprezintă densitatea de neutroni care ajung în unitatea de timp la „vîrsta" θ_s, numită și densitatea de încetinire.

Afirmația că noua mărime este utilă în calculul încetinirii se confirmă acum direct, deoarece, înlocuind (2.215) în (2.203), se obține ușor

$$\psi(z, \mu, u) = \frac{1}{4 \pi \xi} \left[\chi(z, \theta) - \mu \frac{\lambda(u)}{[1 - \overline{\cos \theta}]} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right] \tag{2.219}$$

sau

$$\int_0^1 \psi(z, \mu, u)\, \mu\, d\mu = \frac{1}{8 \pi \xi} \left[\chi(z, \mu) - \frac{2}{3} \frac{\lambda(u)}{[1 - \overline{\cos \theta}]} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right], \tag{2.220}$$

adică fluxul generalizat și curentul total de neutroni.

La deducerea ecuației „vîrstei" (2.216) nu a fost necesară folosirea transformatelor integrale, dar la rezolvarea ei vor fi folosite cu succes.

Aplicații

a. Mediu infinit

În cazul unui mediu infinit, densitatea de încetinire se anulează pentru $z \to \infty$, iar funcția-sursă se poate scrie

$$T(z, \theta) = S \delta(z)\, \delta(\theta), \tag{2.221}$$

ceea ce reduce ecuația vîrstei la

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + S \delta(z)\, \delta(\theta). \tag{2.222}$$

Soluția ei se obține prin introducerea transformatei Fourier a densității de încetinire :

$$\bar{\chi}(\xi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi z} \chi(z, \theta)\, dz. \tag{2.223}$$

Integrînd pe părți și ținînd seama de comportarea amintită a densității de încetinire la infinit, se obține rezultatul

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} e^{i\xi z}\, dz = -\xi^2 \bar{\chi}(\xi, \theta), \tag{2.224}$$

care transformă ecuația (2.222) cu derivate parțiale într-o ecuație diferențială ordinară :

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\theta} + \xi^2 \bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\theta), \tag{2.225}$$

care, rescrisă sub forma

$$\frac{d}{d\vartheta}(e^{\xi^2\theta} \bar{\chi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\theta)\, e^{\xi^2\theta}, \tag{2.226}$$

sugerează imediat soluția

$$\bar{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2\theta}. \tag{2.227}$$

Transformarea inversă Fourier a lui $\bar{\chi}$ furnizează în cele din urmă direct densitatea de încetinire căutată :

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2\theta - i\xi z}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} e^{-z^2/4\theta}. \tag{2.228}$$

Cu ajutorul acestei funcții se definește și o altă mărime importantă în procesul de încetinire al neutronilor în reactor, și anume lungimea de încetinire :

$$\lambda_s(u) = \left[\frac{\overline{z^2(u)}}{2}\right]^{1/2}, \tag{2.229}$$

unde

$$\overline{z^2(u)} = \frac{\int d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \psi(z, \mu, u)\, du}{\int d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z, \mu, u)\, du}. \tag{2.230}$$

Întrucît cu rezultatul (2.228) se obține

$$\overline{z^2(u)} = 4\theta \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du}{\int_0^\infty e^{-u^2} du} = 4\theta \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\theta, \tag{2.231}$$

lungimea de încetinire în mediu infinit este dată de

$$\lambda_s(u) = \theta^{1/2}. \tag{2.232}$$

b. Mediu finit

În cazul unui mediu finit, pe care îl vom considera de geometrie plană, funcția sursă va avea o expresie diferită de cele precedente:

$$T(z, \theta) = S\,\delta(z - z')\,\delta(\theta). \tag{2.233}$$

Întrucît densitatea de încetinire a neutronilor se anulează la marginile $z = 0$ și $z = a$ ale plăcii transformata ei Fourier este în acest caz

$$\overline{\chi}(u, \theta) = \int_0^a \chi(z, \theta) \sin\frac{n\pi z}{a}\, dz, \tag{2.234}$$

se obține

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\, dz = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}\overline{\chi}(n, \theta), \tag{2.235}$$

care permite, împreună cu (2.233), simplificarea ecuației (2.226) la forma

$$\frac{d\overline{\chi}}{d\theta} + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\overline{\chi} = S \sin\frac{n\pi z'}{a}\,\delta(\theta), \tag{2.236}$$

cu soluția evidentă

$$\overline{\chi} = S \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right) e^{-n^2\pi^2\theta/a^2}. \tag{2.237}$$

Aplicînd acestei soluții transformata Fourier inversă, se obține densitatea de încetinire în mediu plan de grosime a finită:

$$\chi(z, \theta) = \frac{2S}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right) e^{-n^2\pi^2\theta/a^2}. \tag{2.238}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unei surse de forma $S(z)\,\delta(\theta)$, în loc de (2.233) se va obţine

$$\chi(z,\theta)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right)e^{-n^2\pi^2\theta/a^2}\int_0^a S(z')\sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right)dz'. \qquad (2.239)$$

c. Mediu finit cu distanţă de extrapolare

Condiţia folosită în cazul precedent, de anulare a densităţii de încetinire la marginile plăcii ($\chi(z,\theta)=0$ pentru $z=0$ sau a), nu este riguros corectă şi se înlocuieşte în calcule mai exacte prin alte două condiţii:

1) $\chi(z,\theta)\to 0$ cînd $z\to\infty$ pentru orice θ;

2) Curentul de neutroni se anulează la $z=0$, adică, conform expresiei (2.220),

$$\chi(z,\theta)-\frac{2\,\lambda(u)}{3\,[1-\overline{\cos\theta})}\frac{\partial\chi(z,\theta)}{\partial z}=0. \qquad (2.240)$$

Înainte de a aplica noile condiţii simplificăm ecuaţia vîrstei:

$$\frac{\partial\chi(z,\theta)}{\partial\vartheta}=\frac{\partial^2\chi(z,\theta)}{\partial z^2}+\delta(z-z')\,\delta(\theta), \qquad (2.241)$$

prin introducerea transformatei Laplace a densităţii de încetinire:

$$\Phi(z,p)=\int_0^{\infty}\chi(z,\theta)\,e^{-p\theta}\,d\theta, \qquad (2.242)$$

care conduce la ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}-p\Phi=-\delta(z-z'). \qquad (2.243)$$

Pentru obţinerea acestei ecuaţii s-a introdus (2.243) în (2.241), s-a multiplicat cu $e^{-p\vartheta}$ şi s-a efectuat integrarea pe ϑ.

Soluţia ecuaţiei (2.243), pe care o vom nota

$$\Phi(z,p)=\begin{cases}\Phi_1(z,p), & 0\leqslant z\leqslant z',\\ \Phi_2(z,p), & z\geqslant z',\end{cases} \qquad (2.244)$$

$$\Phi_1(z,p)=\Phi_2(z,p),\ \text{pentru}\quad z=z', \qquad (2.245)$$

se obţine impunînd cele două condiţii amintite unei funcţii care trebuie să satisfacă şi ecuaţia (2.241).

Condiția (2.240), de exemplu, devine

$$\Phi_1(z, p) - \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 \frac{\partial \Phi_1(z, p)}{\partial z} = 0, \qquad \text{la } z = 0, \tag{2.246}$$

unde $\bar{\lambda}_0 = \dfrac{\lambda_0}{[1 - \cos\theta]}$, λ_0 fiind valoarea constantă a lui $\lambda(u)$

iar $$\frac{\partial \Phi_1(z,p)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2(z,p)}{\partial z} = 1.$$

Din (2.243) și (2.244) rezultă

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A\, e^{-(z'-z)p^{1/2}} + B\, e^{(z'-z)p^{1/2}}, \\ \Phi_2 &= C\, e^{-(z'-z)p^{1/2}}, \end{aligned} \tag{2.247}$$

iar A, B și C se deduc din condițiile (2.245) și (2.246), care formează sistemul

$$\begin{aligned} &A + B - C = 0, \\ &p^{1/2}(A - B + C) = 1, \\ &Ae^{-2z'p^{1/2}}\left(1 - \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 p^{1/2}\right) + B\left(1 + \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 p^{1/2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.248}$$

Din rezolvarea acestui sistem, soluțiile Φ_1, Φ_2 se scriu explicit

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}p^{1/2} e^{-(z'-z)p^{1/2}} - \frac{1}{2}p^{-1/2} e^{-(z+z')p^{1/2}} + \frac{4\bar{\lambda}_0 p^{1/2}}{3p^{1/2}\left(1 + \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 p^{1/2}\right)} e^{-(z-z')p^{1/2}}, \tag{2.249}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2p^{1/2}}\left[1 - \left(\frac{1 - \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 p^{1/2}}{1 + \frac{2}{3}\bar{\lambda}_0 p^{1/2}}\right) e^{-2z'p^{1/2}}\right] e^{-(z-z')p^{1/2}}.$$

Transformatele inverse Laplace ale celor două soluții reprezintă densitățile de încetinire căutate în cazul folosirii condițiilor la margine riguroase :

$$\chi_{1,2}(z, \theta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_{1,2}(z, p)\, e^{p\theta}\, dp. \tag{2.250}$$

Efectuînd integrările de contur care apar în transformarea inversă (2.250) (expuse în amănunt în lucrarea citată), se obține în final

$$\chi(z,\theta)=\frac{1}{(4\pi\theta)^{1/2}}\left[e^{-(z-z')^2/4\theta}-e^{-(z+z')/4\theta}\right]-\frac{3}{2\bar{\lambda}_0}\exp\left[\frac{9\theta}{4\bar{\lambda}_0}+\frac{3(z+z')}{2\bar{\lambda}_0}\right]\times$$

$$\times\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{3\theta^{1/2}}{2\bar{\lambda}_0}+\frac{z+z'}{2\theta^{1/2}}\right)\right]. \qquad (2.251)$$

Această soluție conține și cazul precedent, în care se adopta condiția la margine neriguroasă $\chi(0,\theta)=\chi(a,\theta)=0$ și care se obține din (2.251) pentru $\bar{\lambda}_0=0$:

$$\chi(z,\theta)=\frac{1}{(4\pi\theta)^{1/2}}[e^{-(z-z')^2/4\theta}-e^{-(z+z')^2/4\theta}]. \qquad (2.252)$$

d. Extensiunea la geometrii complexe

1. *Mediu tridimensional infinit și sursă punctiformă*

Avantajele obținute prin folosirea transformatelor integrale în soluționarea ecuației de transport al neutronilor (în cazurile precedente în aproximația „vîrstei") sînt și mai mult puse în evidență în cazul geometriilor complexe.

Ecuația „vîrstei" (2.216) se generalizează în cazul tridimensional la

$$\frac{\partial\chi}{\partial\theta}=\nabla^2\chi(\mathbf{r},\theta)+T(\mathbf{r},\theta). \qquad (2.253)$$

Vom considera întîi un mediu infinit cu sursă punctiformă, pentru care ecuația (2.253) se reduce la

$$\frac{\partial\chi}{\partial\theta}=\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,S(\theta). \qquad (2.254)$$

Folosind transformata Fourier tridimensională a densității de încetinire în (2.254)

$$\bar{\chi}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\mathbf{r},\theta)\,e^{i(\rho r)}\,dx\,dy\,dz,\ \rho=(\xi,\eta,\zeta) \qquad (2.255)$$

înmulțind ambii membrii ai ecuației (2.253) cu $\exp([i(\xi x+\eta y+\zeta z)]$ și integrînd, se obține ecuația transformată Fourier

$$\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial\theta}=-\rho^2\bar{\chi}+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}S(\theta), \qquad (2.256)$$

a cărei soluție este

$$\bar{\chi}(\rho, \theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_0^\theta S(\theta') \, e^{-\rho^2(\theta-\theta')} \, d\theta' \tag{2.257}$$

sau, după transformarea inversă,

$$\chi(\mathbf{r}, \theta) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\theta S(\theta') \, d\theta' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2(\theta-\theta') - i(\rho, \mathbf{r})} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{2.258}$$

Această expresie a densității de încetinire se simplifică la

$$\chi(\mathbf{r}, \theta) = \int_0^\theta \frac{S(\theta') \, e^{-r^2/4(\theta-\theta')} d\theta'}{4\pi(\theta - \theta')} \tag{2.259}$$

dacă se folosește rezultatul cunoscut din teoria integralelor :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2\theta - i\xi x} \, d\xi = \left(\frac{\pi}{\theta}\right)^{1/2} e^{-x^2/4\theta}. \tag{2.260}$$

Pentru o sursă de forma $S(\theta) = \delta(\theta)$, densitatea de încetinire devine

$$\chi(\mathbf{r}, \theta) = \left(\frac{1}{4\pi\theta}\right)^{3/2} e^{-r^2/4\theta}. \tag{2.261}$$

2. *Mediu bară infinită*

1. În acest caz este utilă folosirea transformatei Fourier în sinus atît pentru densitatea de încetinire, cît și pentru sursa localizată arbitrar în mediu și pe care o luăm de forma

$$T(\mathbf{r}, \theta) = S(x, y, z) \, U(\theta) \tag{2.262}$$

pentru a pune în evidență că numai componenta S este transformabilă :

$$\bar{\chi}(\xi, m, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a d \int_0^b dy \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x, y, z) \, e^{i\xi z} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dz, \tag{2.263}$$

$$\bar{S}(\xi, m, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y, z) \, e^{i\xi z} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dz. \tag{2.264}$$

Ecuația (2.253) transformată Fourier în sinus devine astfel

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\theta} + \left(\xi^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \bar{\chi} = \bar{S}(\xi, m, n) \, U(\theta), \tag{2.265}$$

cu soluția

$$\bar{\chi} = \bar{S}(\xi, m, n) \int_0^{\theta} U(\theta') \exp\left[-\left(\xi^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi}{b^2}\right)(\theta - \theta')\right] d\theta'. \quad (2.266)$$

Transformata inversă se obține imediat:

$$\chi(x, y, z, \theta) = \frac{2}{ab}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\theta} U(\theta')\, d\theta' \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi z}\, d\xi\, \bar{S}(\xi, m, n)\, e^{-(\xi^2 + m^2\pi^2/a^2 + n^2\pi^2/b^2)(\theta - \theta')}. \quad (2.267)$$

2. În cazul în care sursa localizată arbitrar în (x', y', z') este punctiformă, adică

$$S(x, y, z) = \delta(x - x')\,\delta(y - y')\,\delta(z - z'), \quad (2.268)$$

expresia densității de încetinire devine

$$\chi(x, y, z, \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, ab} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \times \quad (2.269)$$
$$\times \int_0^{\theta} \frac{U(\theta')\, d\theta'}{(\theta - \theta')^{1/2}} \exp\left[-\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)(\theta - \theta') - \frac{(z - z')^2}{4(\theta - \theta')}\right],$$

deoarece în locul transformatei (2.264) putem folosi

$$\bar{S}(\xi, m, n) = (2\pi)^{-1/2} e^{i\xi z'} \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right). \quad (2.270)$$

3. Cînd poziția sursei coincide cu centrul geometric al barei și deci $x' = a/2$; $y' = b/2$; $z' = 0$, aceste valori introduse în (2.269) conduc la o altă expresie a densității de încetinire:

$$\chi(x, y, z, \theta) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\, ab} \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin\left[\frac{2(r+1)\pi x}{a}\right]\sin\left[\frac{2(s+1)\pi y}{b}\right](-1)^{r+s}\int_0^{\theta} \frac{U(\theta')}{(\theta - \theta')^{1/2}}\, d\theta' \times$$
$$\times \exp\left\{-\left[\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}\right](\theta - \theta') - \frac{z^2}{4(\theta - \theta')}\right\}. \quad (2.271)$$

4. Un alt caz care poate apărea adesea în practică este cel al sursei filiforme, paralelă cu axa de simetrie a barei sau confundîndu-se cu ea.

În primul caz, expresia sursei este

$$S(x, y, z) = \delta(x - x')\,\delta(y - y'), \quad (2.272)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu transformata Fourier în sinus

$$\bar{S}(\xi, m, n) = (2\pi)^{1/2}\,\delta(\xi)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right), \tag{2.273}$$

care conduce la densitatea de încetinire

$$\chi(x,y,z,\theta) = \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right)\times$$
$$\times\int_0^{\theta} U(\theta')\,d\theta'\exp\left[-\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)(\theta-\theta')\right], \tag{2.274}$$

iar în cel de-al doilea caz această densitate se reduce la

$$\chi(x,y,z,\theta) = \frac{4}{ab}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{r+s}$$
$$\sin\left[\frac{(2r+1)\pi x}{a}\right]\sin\left[\frac{(2s+1)\pi y}{b}\right]\int_0^{\theta} U(\theta')\,d\theta'\exp\left\{-\left[\frac{(2r+1)^2\pi^2}{a^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(2s+1)^2\pi^2}{b^2}\right](\theta-\theta')\right\}. \tag{2.275}$$

La același rezultat am fi ajuns folosind ecuația (2.253) pentru cazul bidimensional și exprimînd sursa filiformă prin

$$T(r,\theta) = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,U(\theta'). \tag{2.276}$$

3. *Mediu finit*

5. Cazul real întîlnit în practică este acela al reactorului finit în toate direcțiile pentru care ecuația (2.253) este valabilă cu condițiile aproximative

$$\chi = 0 \text{ pentru } x = 0, a;\ y = 0, b;\ z = 0, c. \tag{2.277}$$

Transformata Fourier în sinus a densității de încetinire este în acest caz de forma

$$\bar{\chi}(m,n,q) = \int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c \chi(x,y,z,\theta)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right)dz, \tag{2.278}$$

care conduce, împreună cu condițiile (2.277), la ecuația transformată

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\theta} + \mu_{mnq}^2\,\bar{\chi} = \bar{S}(m,n,q)\,\delta(\theta), \tag{2.279}$$

cu

$$\mu_{mnq}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{q^2}{c^2}\right).$$

Considerînd că soluția acestei ecuații este de forma

$$\bar{\chi}(m, n, q, \theta) = \bar{S}(m, n, q, \theta)\, e^{-\mu^2_{mnq}\theta}, \tag{2.280}$$

se obține prin inversare densitatea de încetinire

$$\chi(x, y, z, \theta) = \frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \bar{S}\, e^{-\mu^2_{mnq}\theta} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{q\pi z}{c}. \tag{2.281}$$

În funcție de poziția și geometria sursei, această densitate se simplifică, deoarece

a) în cazul sursei plane din planul $z = z'$

$$S(x, y, z) = S_0(x, y)\, \delta(z - z'),$$

$$\bar{S}(m, n, q) = \bar{S}_0(m, n) \sin\left(\frac{q\pi z'}{c}\right) = \sin\frac{q\pi z'}{c} \int_0^a \int_0^b S_0(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx dy;$$

b) în cazul sursei punctiforme din punctul (x', y', z')

$$S(x, y, z) = S_0\, \delta(x - x')\, \delta(y - y')\, \delta(z - z'),$$

$$\bar{S}(m, n, q) = S_0 \sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z'}{c}\right),$$

$$\chi(x, y, z, \theta) =$$

$$= \frac{8 S_0}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} e^{-\mu^2_{mnq}\theta} \sin\frac{m\pi x'}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{n\pi y'}{b} \sin\frac{q\pi z}{c} \sin\frac{q\pi z'}{c}; \tag{2.282}$$

c) în cazul sursei punctiforme în centrul reactorului

$$\chi(x, y, z, \theta) = \frac{8 S_0}{abc} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{r+s+t} \times$$

$$\times \sin\frac{(2r+1)\pi x}{a} \sin\frac{(2s+1)\pi y}{b} \sin\frac{(2t+1)\pi z}{c}$$

$$\exp\left\{-\pi^2 \theta \left[\frac{(2r+1)^2}{a^2} + \frac{(2s+1)^2}{b^2} + \frac{(2t+1)^2}{c^2}\right]\right\}. \tag{2.283}$$

Geometrie sferică

Întrucît în practică, în numeroase cazuri, zona activă are forma sferică, vom extinde metodele transformatelor integrale precedente și la acest caz.

Deoarece funcțiile care ne interesează (densitatea de încetinire, sursele etc.) depind numai de o singură variabilă $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (în cazul izotrop, omogen), ecuația (2.253) se simplifică la

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r}\right) + S(r)\,\delta(\theta),$$

sau

$$\frac{\partial (r, \chi)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r, \chi) + rS(r)\,\delta(\theta). \tag{2.284}$$

Considerînd zona activă a reactorului (în cazul multiplicator) sau a mediului moderator (în cazul nemultiplicator) de rază a, introducem transformata Fourier în sinus a densității de încetinire,

$$\overline{\Phi}_s(n) = \int_0^a r\chi(r) \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) dr, \tag{2.285}$$

și a sursei,

$$\overline{T}_s(n) = \int_0^a rS(r) \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) dr, \tag{2.286}$$

care transformă ecuația (2.284) în

$$\frac{d\overline{\Phi}_s}{d\theta} + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\overline{\Phi}_s = \overline{T}_s(n)\,\delta(\theta),$$

unde am ținut seama și de condiția $r\chi(r) = 0$ la $r = a$, de anulare a densității de încetinire la marginea mediului cu o soluție de forma

$$\overline{\Phi}_s(n) = \overline{T}_s(n)\, e^{-n^2\pi^2\theta/a^2}, \tag{2.287}$$

și, ținînd seama și de definiția (2.285), obținem prin inversare

$$\chi(r, \theta) = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) e^{-n^2\pi^2\theta^2/a^2} \int_0^a \rho S(\rho) \sin\left(\frac{n\pi\rho}{a}\right) d\rho. \tag{2.288}$$

Și în cazul sferic obținem diverse expresii pentru densitatea de încetinire în funcție de poziția și de forma sursei:

a) pentru sursă punctiformă situată în centrul sferei:

$$S(\rho) = S\delta(\rho)/4\pi\rho^2; \quad \int_0^a \rho S(\rho) \sin\frac{n\pi\rho}{a} d\rho = \frac{nS}{4a},$$
$$\chi(r, \theta) = \frac{S}{2a^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) e^{-n^2\pi^2\theta/a^2}; \tag{2.289}$$

b) în cazul unei surse de forma unei pături sferice concentrice de rază $b < a$:

$$S(\rho) = S\delta(\rho - b)/4\pi b^2,$$

$$\overline{T}_s(n) = \frac{S}{4\pi b} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right), \tag{2.290}$$

$$\chi(r, \theta) = \frac{S}{2\pi abr} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) e^{-n^2\pi^2\theta/a^2};$$

c) în cazul sursei punctiforme situate în centrul unei cavități de rază a, înglobată în zona activă sau în mediul moderator, considerate de rază infinită :

$$S = \frac{S\delta(r - a)}{4\pi a^2},$$

$$\chi(r, \theta) = \frac{S e^{-(r-a)^2/4\theta}}{4\pi r(\pi^3\theta)^{1/2}} \left\{1 - \frac{\sqrt{\pi\theta}}{a} \exp\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{a}\right)^2 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{a}\right)\right]\right\}. \tag{2.291}$$

La distanțe mai mari, funcția de eroare poate fi aproximată prin

$$\operatorname{erf}(x) \simeq 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}$$

și deci pentru $(r - a) \geqslant 2\theta^{1/2}$ densitatea de încetinire devine

$$\chi(r, \theta) \simeq \frac{S e^{-(r-a)^2/4\theta}}{(4\pi\theta)^{3/2}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{(r-a)a}{2\theta}}. \tag{2.292}$$

4. *Medii multiple*

O altă situație fizică întîlnită din ce în ce mai des în practică este cea a mediului (multiplicator sau nemultiplicator), format din mai multe substanțe cu proprietăți nucleare diferite. În această categorie intră reactorii (sau instalațiile critice, subcritice sau nemultiplicatoare) cu mai multe regiuni, cu moderatori sau reflectori multipli, cu strat de regenerare (*briding*) etc. Această succintă enumerare este suficientă pentru a sublinia importanța tratării matematice și a acestui gen de probleme. Metoda transformărilor integrale se bucură de mult succes și în aceste cazuri, făcînd uz mai ales de transformările integrale Laplace și Hankel.

Vom expune teoria în cazul a două medii (notate cu indicii 1 și 2), extinderea la mai multe medii efectuîndu-se în mod analog.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd că sursa punctiformă se află în planul care separă cele două medii, putem scrie ecuațiile pentru densitățile de încetinire din fiecare mediu sub forma

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \theta_1} = \nabla^2 \chi_1 + \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(\theta_1), \tag{2.293}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \theta_2} = \nabla^2 \chi_2 + \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(\theta_2), \tag{2.294}$$

$$\theta_{1,2} \equiv \int_0^u \frac{\lambda^2_{1,2}(u')\,du'}{3\xi_{1,2}(1-\overline{\cos\theta}_{1,2})}.$$

Presupunînd că drumurile libere mijlocii $\lambda_{1,2}(u)$ au o deviație față de u de așa natură încît raportul lor rămîne constant (este cazul întîlnit de obicei în practică, cînd proprietățile mediilor nu diferă prea mult între ele) și ținînd seama și de legătura dintre densitatea de încetinire și cea a neutronilor (N_0) dată de $\chi = \xi v N_0/\lambda$, obținem condiția

$$\frac{\lambda_1(u)\chi_1}{\xi_1} = \frac{\lambda_2(u)\chi_2}{\xi_2}, \text{ la } z = 0, \tag{2.295}$$

și mărimile

$$D \equiv \frac{\lambda_2^2(u)\xi_1(1-\overline{\cos\theta}_1)}{\lambda_1^2(u)\xi_2(1-\overline{\cos\theta}_2)}, \text{ (D nu este coeficient de difuzie)} \tag{2.296}$$

$$\triangle \equiv \frac{\xi_1(1-\overline{\cos\theta}_2)}{\xi_2(1-\overline{\cos\theta}_1)},$$

care permit reformularea ecuațiilor (2.293) și (2.294) în coordonatele polare cilindrice ρ și z:

$$D\frac{\partial \chi_1}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \chi_1}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{D\delta(\rho)\delta(z)\delta(\theta_2)}{2\pi\rho}, \tag{2.297}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \theta_2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \chi_2}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2} + \frac{\delta(\rho)\delta(z)\delta(\theta_2)}{2\pi\rho}. \tag{2.298}$$

Folosind transformata Laplace

$$\Phi_{1,2}(p) = \int_0^\infty \chi_{1,2}\, e^{-p\theta_2}\, d\theta_2, \tag{2.299}$$

ecuațiile precedente devin

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}=Dp\,\Phi_1-D\,\frac{\delta(\rho)\,\delta(z)}{2\pi\rho},$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_2}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}=p\Phi_2-\frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}, \tag{2.300}$$

cu condițiile la margine

$$\Phi_1=(D\triangle)^{1/2}\,\Phi_2\quad,\quad z=0,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=D\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+D\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}. \tag{2.301}$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații (2.300) cu condițiile (2.301), se folosesc transformatele integrale Hankel de ordin zero ale funcțiilor

$$\overline{\Phi}_{1/2}(\xi)=\int_0^\infty\rho J_0(\xi,\rho)\,\Phi_{1,2}(\rho)\,d\rho, \tag{2.302}$$

care transformă sistemul (2.300) și condițiile (2.301) în

$$\frac{d^2\overline{\Phi}_1}{dz^2}=(Dp+\xi^2)\,\overline{\Phi}_1-\frac{D}{2\pi}\,\delta(z),$$
$$\frac{d^2\overline{\Phi}_2}{dz^2}=(p+\xi^2)\,\overline{\Phi}_2-\frac{\delta(z)}{2\pi}, \tag{2.303}$$

$$\overline{\Phi}_1=(D\Delta)^{1/2}\,\overline{\Phi}_2,$$
$$\frac{d\overline{\Phi}_1}{dz}=D\frac{d\overline{\Phi}_2}{dz}+\frac{D}{2\pi z}. \tag{2.304}$$

Luînd soluțiile acestui sistem de forma

$$\overline{\Phi}_1=Ae^{(\xi^2+pD)^{1/2}z},$$
$$\overline{\Phi}_2=Be^{-(\xi^2+p)^{1/2}z}, \tag{2.305}$$

aplicîndu-le condițiile (2.304) și folosind transformările inverse Laplace și Hankel, se obțin în final densitățile de încetinire din cele două medii:

$$\chi_1=\frac{D\Delta^{1/2}}{4\pi^2 i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{p\theta_2}\,dp\int_0^\infty\frac{\xi J_0(\xi\rho)e^{(\xi^2+pD)^{1/2}z}\,d\xi}{[\Delta(\xi^2+pD)]^{1/2}+[D(\xi^2+p)]^{1/2}},$$
$$\chi_2=\frac{D^{1/2}}{4\pi^2 i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{p\theta_2}\,dp\int_0^\infty\frac{\xi J_0(\xi\rho)e^{-(\xi^2+p)^{1/2}z}\,d\xi}{[\Delta(\xi^2+pD)]^{1/2}+[D(\xi^2+p)]^{1/2}}. \tag{2.306}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru exemplificare vom efectua integralele duble în cazul mai simplu în care $\Delta = 1$ și $z = 0$. Ținînd seama de rezultatul cunoscut din teoria integralelor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\theta_2}\,dp\left[(\xi^2+p)^{1/2}-\left(\frac{\xi^2}{D}+p\right)^{1/2}\right]=\frac{1}{2(\pi\theta_2^3)^{1/2}}(e^{-\xi^2\theta_2/D}-e^{-\xi^2\theta_2})$$

$$\int_0^\infty \xi e^{-\theta_2\xi^2}J_0(\xi\rho)\,d\xi=\frac{1}{2\theta_2}e^{-\rho^2/4\theta_2}, \qquad (2.307)$$

se obține pentru densitatea de încetinire în acest caz, expresia

$$\chi_2(\rho,0,\theta_2)=\frac{1}{(4\pi\theta_2)^{3/2}(1-1/D)}\left[E_i\left(-\frac{\rho^2 D}{4\theta_2}\right)-E_i\left(-\frac{\rho^2}{4\theta_2}\right)\right], \qquad (2.308)$$

unde E_i este funcția integrală exponențială, definită prin

$$-E_i(-x)\equiv\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}, 0<x<\infty.$$

Pentru $D\to 1$, deci în cazul unui mediu cu sursă punctiformă,

$$E_i\left(-\frac{\rho^2 D}{4\theta_2}\right)=E_i\left(-\frac{\rho^2}{4\theta_2}\right)+(D-1)\,e^{-\rho^2/4\theta_2}$$

și deci

$$\chi_2(\rho,0,\theta_2)=\frac{1}{(4\pi\theta_2)^{3/2}}e^{-\rho^2/4\theta_2}, \qquad (2.309)$$

care este expresia clasică a densității de încetinire în acest caz.

Dependența de timp și de captură Pornind tot de la ecuația de transport generală

$$\lambda(u)\left[\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathbf{\Omega}\cdot\operatorname{grad}\psi\right]+\psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},u,t)=$$

$$=\int_0^u du'\int d\mathbf{\Omega}'h(u')\psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},u)f(\mu_0,u\to u')+S(\mathbf{r},u) \qquad (2.310)$$

și urmînd aceleași etape care au condus la ecuația (2.182), dar păstrînd dependența temporală și captura, se obține

$$\frac{\lambda(u)}{v}\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+\lambda(u)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+[1-h(u)]\psi_0=-\xi\frac{\partial\psi_0}{\partial u}+\delta(z)\delta(u)\delta(t),$$

$$\frac{1}{3}\lambda_t(u)\frac{\partial\psi_0}{\partial z}+\psi_1=0, \qquad (2.311)$$

$$\lambda_t(u)=\lambda(u)/(1-\overline{\cos\theta}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Transformînd acest sistem în variabila densitate de încetinire, se obține

$$\frac{\partial \chi(z, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{3}{v\,\lambda_t(u)} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{3[1 - h(u)]\chi}{\lambda(u)\lambda_t(u)} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \delta(z)\delta(\theta)\delta(t), \qquad (2.312)$$

care se rezolvă prin metodele transformărilor integrale, indicate în cazurile precedente.

2.5. Metoda nucleelor integrale

Una dintre metodele mai riguroase de a exprima și de a rezolva ecuația de transport a neutronilor este metoda nucleelor integrale*, care prezintă strînse legături cu metoda transformatelor integrale [R—2].

Ea a apărut din observația că nucleele ecuațiilor de transport sub formă integrală sînt, în anumite cazuri, soluții ale ecuațiilor de difuzie sau de încetinire a neutronilor.

Astfel, luînd în considerare ecuația integro-diferențială de transport a lui Boltzmann în cazul monodimensional, monoenergetic, staționar

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma \Phi(x, \mu) = S + \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \Phi'(x')\, \Sigma_s(\mu_0)\, d\mu' dl', \qquad (2.313)$$

care se poate transforma într-o ecuație integrală echivalentă de forma

$$\Phi(x) = \int_{x'} \Phi(x') \Sigma_s \left[\frac{e^{-\Sigma |x - x'|}}{4\pi |x - x'|^2} \right] dx', \qquad (2.314)$$

unde paranteza dreaptă reprezintă nucleul ecuației integrale, care se notează cu $K(x, x')$, observăm că soluția ecuației lui Boltzmann se poate scrie

$$\Phi(x) = \int_{x'} \Phi(x') \Sigma_s K(x, x')\, dx'. \qquad (2.315)$$

Dar acest nucleu integral nu este altceva decît fluxul de neutroni din punctul x datorit unei surse punctiforme situate în x', deci el este chiar soluția ecuației de mai sus în cazul sursei punctiforme.

Nucleele ecuațiilor integrale pot reprezenta orice proces care are loc în reactorul nuclear, dar cele mai folosite nuclee sînt cele care reprezintă procesele de difuzie și de încetinire sau, mai general, de transport al neutronilor.

---

* Cunoscute și sub denumirea de kernele sau funcții Green sau, mai rar, funcții de influență.

Aceste nuclee integrale reprezintă de fapt probabilități ca neutronii să apară într-un punct dat și cu anumite caracteristici, în funcție de probabilitățile ca ei să fi apărut mai înainte, în alt punct dat și cu alte caracteristici. Deci ele se definesc în funcție de o anumită geometrie.

Astfel de nuclee, pe care le vom nota cu K, pot reprezenta de exemplu :

— probabilitatea ca un neutron apărut în punctul r' să se găsească după un anumit număr de ciocniri (de diverse tipuri) în punctul r (nucleul de difuzie) sau

— probabilitatea ca un anumit număr de neutroni să se găsească după un anumit interval de timp în punctul r (nucleu cinetic) sau

— probabilitatea ca un neutron să se găsească într-un punct dat după ce a suferit o singură (primă) ciocnire (nucleul de primă ciocnire sau de transport) sau

— probabilitatea ca un anumit număr de neutroni apăruți într-o regiune dată a reactorului și cuprinși într-un interval dat de energie să se găsească în altă regiune a reactorului și în alt interval dat de energie (nucleul de încetinire) sau

— probabilitatea ca într-un anumit punct (regiune) să aibă loc n fisiuni datorite unui neutron generat în alt punct (regiune) (nucleu de fisiune).

Se pot obține și combinații ale acestor probabilități (adică produse de nuclee), care să descrie procesele mai complexe din reactor (nucleul difuzie-încetinire etc.) și care pot fi extinse și la alte geometrii.

În cazul cel mai general întîlnit în fizica reactorilor (difuzie și încetinire), nucleele integrale se notează

$$K_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E, E'),$$

unde i poate reprezenta p = punct, pl = plan, l = linie, c = cilindru, s = sferă, ș.a.m.d.

iar j poate reprezenta D = difuzie, Sl = încetinire, Tr = transport, F = fisiune etc.

și ele permit exprimarea sub formă integrală a soluțiilor ecuațiilor reactorului fie sub forma fluxului de neutroni

$$\Phi(\mathbf{r}, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, ' E)\, d\tau', \tag{2.316}$$

fie sub forma densității de încetinire

$$q(\mathbf{r}, E) = k \Sigma_a \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{th}(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)\, d\tau'. \tag{2.317}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația integro-diferențială însăși a reactorului (în cazul neutronilor termici) se poate rescrie în funcție de aceste nuclee integrale sub forma

$$D\Delta\Phi_{th} + \Sigma_a \Phi_{th} + \nu\Sigma_f \int_{ZA} \Phi_{th}(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E_{th})\, d\mathbf{r}'. \qquad (2.318)$$

Rezultă din cele spuse mai sus că nucleele integrale depind atît de proprietățile neutronilor, cît și de cele ale mediului în care ei difuzează, precum și de geometria surselor de neutroni, adică de condițiile la limită.

Folosirea nucleelor integrale ne permite să transformăm o ecuație diferențială sau integro-diferențială cu anumite condiții la limită într-o ecuație integrală care conține implicit aceste condiții. De asemenea se mai folosește în soluționarea acestor ecuații o proprietate remarcabilă după care o ecuație neomogenă (deci mai dificilă), dar cu condiții la limită omogene, se poate transforma într-o ecuație omogenă cu condiții la limită neomogene și invers. Alegerea va fi dictată de dificultatea de a soluționa ecuația neomogenă sau de a ține seama de condițiile la limită neomogene.

În multe cazuri, nucleele integrale se pot obține prin raționamente simple privind probabilitatea procesului sau probabilitățile diverselor etape ale acestuia, iar extinderea la cazuri mai complicate ocolește cu succes dificultățile legate de soluționarea ecuației integro-diferențiale a lui Boltzmann, recurgînd la cîteva relații simple care vor fi deduse. Acestea permit nu numai trecerea de la o geometrie complexă la alta mai simplă, ci chiar transformarea nucleelor integrale definite într-un anumit model (difuzie, vîrstă, transport) în alt model mai corect sau mai adecvat problemei ce trebuie studiată.

Metoda nucleelor integrale permite de asemenea o determinare mai corectă a limitărilor aproximației difuziei sau vîrstei în fizica reactorilor, iar ecuațiile acestor aproximații sînt mai bine adaptate la introducerea corecțiilor de transport. Metoda permite de asemenea exprimarea într-o formă simplă, directă și intuitivă a unor mărimi importante, ca fluxul de neutroni, densitatea de încetinire, probabilitățile diverselor procese care au loc în reactor, condiția de criticitate etc. Trecerea de la o geometrie la alta, de la un proces la altul se face deosebit de comod și cu o evidențiere clară a sensului fizic. Nucleele integrale sau transformatele lor Fourier sînt folosite direct în metodele variaționale sau în metoda Wiener-Hopf, în determinarea laplaceanului reactorului și a condițiilor de criticitate, la enunțarea și la folosirea celei de-a doua teoreme fundamentale a reactorului, iar prin integrarea transformatei Fourier a unui nucleu integral se obține direct economia reflectorului. Tot printr-o transformată Fourier a unui nucleu integral se obține și funcția de transfer a reactorului, atît de importantă la studiul cineticii lui. Proprietatea remarcabilă a nucleelor integrale din teoria

Scanned with OKEN Scanner

reactorilor nucleari de a fi pozitive pentru orice valori ale variabilelor, rezultată din pozitivitatea obligatorie a fluxurilor reale de neutroni pe care le reprezintă, a permis crearea unei teorii spectrale (este vorba de spectrele operatorilor liniari nenegativi) prin intermediul noțiunii de proces multiplicativ, care este un caz particular de lanț Markov.

Deși metoda nucleelor integrale este simplă și directă, ea are dezavantajul determinării analitice dificile a nucleelor în cazurile complicate. Dar acest dezavantaj este în mare parte anulat de posibilitatea de a înlocui nucleele analitice cu nucleele sintetice determinate experimental, care pot fi apoi extrapolate și la alte date ale problemelor.

Această particularitate face ca metoda nucleelor integrale, care are un caracter teoretic deosebit de pronunțat (legat de teoria ecuațiilor integrale), să aibă o legătură mult mai strînsă și mai directă cu experiența decît multe alte metode de calcul mai simple din fizica reactorilor nucleari.

Determinarea analitică a nucleelor este complicată și de faptul că ea depinde în cazul mediilor reale, finite, de prezența marginilor. Această dificultate este ocolită (în cazurile în care există posibilitatea) prin folosirea nucleelor integrale pentru mediul infinit. În acest caz, probabilitatea unui neutron de a se găsi la un moment dat într-un punct dat depinde doar de deplasările lui anterioare, adică de distanța $|r - r'|$, spre deosebire de cazul mediului finit, în care depinde și de distanțele acestor două puncte pînă la margine. Un astfel de nucleu pentru mediul infinit se numește nucleu de deplasare și se notează

$$K^{\infty}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, E, E') \text{ sau, mai simplu, } K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, E, E').$$

În definirea lui mai este necesar să se presupună omogenitatea mediului și izotropia împrăștierii în el.

Dacă nucleul integral K satisface o ecuație integrală liniară (ceea ce este adevărat în cele mai multe cazuri), atunci este posibilă aplicarea principiului suprapunerii pentru a obține fluxul de neutroni sau densitatea de încetinire, datorate nu unei surse izolate, ci unei distribuții de surse de neutroni. Această proprietate permite atît deducerea legăturilor dintre nucleele punctiforme, liniare, plane etc., cît mai ales tratarea cazului real dintr-un reactor nuclear, în care fisiunile pot fi considerate în mod corect drept surse distribuite.

De asemenea, dacă ecuația reactorului (de exemplu în aproximația de difuzie monogrup) este

$$-D\,\Delta\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r}) = \nu\,\Sigma\,\Phi(\mathbf{r}), \tag{2.319}$$

iar soluția în forma de ecuație integrală

$$\Phi(\mathbf{r}) = \nu\,\Sigma_f \int_{ZA} \Phi(\mathbf{r}')\,K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,d\mathbf{r}', \tag{2.320}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci din definiția nucleului $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ rezultă și proprietatea remarcabilă

$$-D\Delta K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Sigma_a K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.321}$$

din care se vede că ν este o valoare proprie a ecuației.

O altă concluzie importantă care rezultă din ecuația de mai sus este că un nucleu integral poate fi definit nu numai prin intermediul soluției integrale a unei ecuații diferențiale, ci și prin intermediul direct al acestei ecuații diferențiale, însoțită însă de condițiile la limită. Pentru mai multă claritate vom scrie deci că, de exemplu, nucleul punctiform pentru mediul finit $K_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ este definit de ecuația diferențială și de condiția la limită

$$K_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \tag{2.322}$$

pentru orice r care se găsește pe marginea extrapolată a mediului.

Un alt rezultat, folosit des în calculele de fizica reactorului, este cel privitor la simetria nucleelor integrale exprimată prin relația

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \tag{2.323}$$

care rezultă din ortogonalitatea funcțiilor proprii ale ecuației (2.329)

$$\int K^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, K(\mathbf{r}', \mathbf{r})\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' = 0.$$

Expresia (2.323) este riguroasă în cazul nucleelor de deplasare, în timp ce în cazul nucleelor generale (în mediu finit) trebuie satisfăcute anumite condiții, care în practică se întîlnesc întotdeauna.

Tot din proprietatea (2.321) a nucleelor integrale rezultă și posibilitatea exprimării lor în serii de funcții proprii ale ecuației reactorului, adică

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_n \frac{u_n(\mathbf{r})\, u_n^*(\mathbf{r}')}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n K_n(\mathbf{r}')\, \psi_n(\mathbf{r}) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r})\, \psi_n(\mathbf{r}')}{\nu_n \Sigma_f} \tag{2.324}$$

sau

$$K(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}')\, \psi_n(\mathbf{r})}{\Sigma_a + DB_n^2}. \tag{2.325}$$

2.5.1. Nucleele integrale de difuzie

Deoarece definiția nucleului integral în cazul simplu al difuziei neutronilor, ca fiind probabilitatea neutronilor din punctul r' (în care se află sursa de neutroni) de a se găsi în punctul r, coincide cu definiția fluxului de neutroni din punctul r, proveniți de la o sursă de neutroni din punctul r', vom considera pentru simplificare că în cazul mediului

infinit, omogen, cu sursă punctiformă monoenergetică de neutroni, acest flux este dat de aproximația difuziei prin expresia

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-k\mathbf{r}}}{4\pi D\mathbf{r}}, \tag{2.326}$$

unde $k = \frac{1}{L}$.

Considerînd sursa în punctul $\mathbf{r}'$, obținem expresia nucleului integral de difuzie (punctiform și infinit) sub forma

$$K_{p.D}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{-k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi D|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{2.327}$$

care este deci soluție a ecuației de difuzie $\Delta K_{p.D} - k^2 K_{p.D} = 0$.

Acest nucleu este liniar, deoarece și ecuația de difuzie din care l-am derivat este liniară. Dar el nu este mai corect decît aproximația elementară a difuziei.

Datorită analogiei cu funcția Yukawa întîlnită în teoria nucleului atomic, nucleele de difuzie mai sînt cunoscute în literatura de specialitate și sub denumirea de nuclee Yukawa.

În mod analog se poate obține și nucleul integral plan de difuzie pin soluția ecuației de difuzie în geometrie plană:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e^{-k\mathbf{r}}}{2kD} \tag{2.328}$$

sau, sub forma de nucleu de deplasare

$$K_{pl.D}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{e^{-k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{2kD}. \tag{2.329}$$

În general deci, fluxul de neutroni din punctul r datorat unei surse punctiforme $S(r')$ din r' se va exprima în metoda nucleelor integrale prin

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int S(\mathbf{r}') K_{p.D}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}'. \tag{2.330}$$

Din aproximația difuziei se mai obțin și alte nuclee integrale de difuzie (vezi tabela 1). Aceste nuclee se pot însă obține și unele din celelalte prin integrarea pe geometria respectivă.

Scanned with OKEN Scanner

TABELA 2.1

Nuclee de difuzie pentru infinit [W-1]

Geometria sursei	Normalizarea sursei	Notația	Nucleul de difuzie (nucleu Yukawa)
Punct	1 n/s	$K_{p.D}(\lvert r-r'\rvert, E)$	$\dfrac{e^{-k\lvert r-r'\rvert}}{4\pi D\lvert r-r'\rvert}$ $k=\dfrac{1}{L}$
Plan	1 n/cm²·s	$K_{pl.D}(\lvert z-z'\rvert, E)$	$\dfrac{e^{-k\lvert z-z'\rvert}}{2kD}$
Linie	1 n/cm·s	$K_{l.D}(s, E)$	$\dfrac{K_0(k\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\Phi'-\Phi)}}{2\pi D}$
Pătură sferică de rază r'	1 n/cm²·s	$K_{S.D}(r, r', E)$	$\dfrac{1}{8\pi rr'kD}[e^{-k\lvert r-r'\rvert}-e^{-k\lvert r+r'\rvert}]$
Pătură cilindrică de rază r'	1 n/cm²·s	$K_{c.D}(r, r', E)$	$r>r'$ $\dfrac{K_0(kr)I_0(kr')}{2\pi D}$; $r<r'$ $\dfrac{K_0(kr')I_0(kr)}{2\pi D}$

Astfel, ținînd seama de faptul că o sursă plană este o sumă de surse punctiforme, nucleul plan $K_{pl.D}(x, x')$ se va obține din cel punctiform prin

$$K_{pl.D}(x, x') = \int dy' \int K_{p.D}(r, r')\, dz', \tag{2.331}$$

în care integrala se efectuează pe tot planul $y'z'$, considerat drept o sumă infinită de surse punctiforme:

$$K_{pl.D}(x, x') = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi K_{p.D}(\lvert x-x'\rvert) = 2\pi \int_0^\infty r K_{p.D}(r)\, dr, \tag{2.332}$$

unde $\rho^2 = r^2 - x^2$ (vezi fig. 2.6.).

Relația inversă

$$K_{p.D}(\mathbf{r}) = -\frac{K'_{pl.D}(\mathbf{r})}{2\pi \mathbf{r}} \tag{2.333}$$

este mult mai folosită, deoarece nucleul integral plan se calculează mai ușor decît cel punctiform, iar pentru r mare chiar determinarea experimentală a nucleului plan se efectuează mai ușor. În mod analog se obțin prin integrări mai dificile relații între nucleele integrale în

alte geometrii. Astfel, nucleul pentru o pătură sferică se obține din nucleele plane printr-o relație de forma

$$K_{sf}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi rr'}[K_{pl}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - K_{pl}(|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|)]. \qquad (2.334)$$

Ca un exemplu de aplicare a acestor relații vom deduce nucleul plan de difuzie din nucleul punctiform.

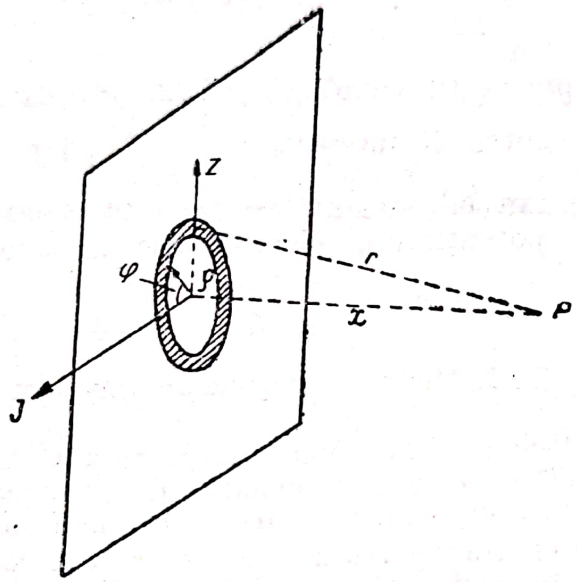


Fig. 2.6

Nucleul de difuzie pentru sursa punctiformă situată în origine ($r' = 0$) fiind

$$K_{p.D}(r, 0) = \frac{e^{-kr}}{4\pi Dr}, \qquad (2.335)$$

obținem prin integrare

$$K_{pl}(z, 0) = 2\pi \int_z^\infty \frac{r\, e^{-kr}}{4\pi Dr}\, dr, \qquad (2.336)$$

$$K_{pl}(z, 0) = \frac{e^{-kz}}{2kD}.$$

Un caz particular interesant îl constituie fluxul dat de o pătură sferică sau cilindrică în exteriorul ei. În primul caz, nucleul dat în tabela 2.1 sub forma

$$\frac{1}{8\pi rr'kD}\,[e^{-k|r-r'|} - e^{-k|r+r'|}] \qquad (2.337)$$

devine pentru $r > r'$

$$\frac{\sin h kr'}{kr'} \cdot \frac{e^{-kr}}{4\pi Dr} \tag{2.338}$$

sau

$$\frac{\sin h\, kr}{kr} \cdot \frac{e^{-kr'}}{4\pi Dr'}, \text{ pentru } r < r', \tag{2.339}$$

care poate fi interpretat (în cazul relației (2.338)) ca o sursă concentrată într-un punct din centru de intensitate $\frac{\sin h\, kr'}{kr'}$, iar în cazul cilindric ca o sursă liniară pe axa cilindrului. Se remarcă analogia cu rezultatele obținute în teoria potențialului electrostatic în cazul sferelor și al cilindrilor.

2.5.2. Nucleele integrale de transport

Pentru a obține analitic nuclee mai corecte decît cele de difuzie este normal să apelăm la soluțiile ecuației de transport. Pentru a evita complicațiile deosebite ale soluțiilor acesteia vom folosi însă aproximația asimptotică a teoriei transportului, care este mai corectă decît aproximația de difuzie și în același timp ne furnizează expresii destul de simple pentru nucleele de transport.

În aproximația asimptotică avem

$$\Phi(r) = \Phi_{as}(r) + \Phi_{tr}(r),$$

$$\Phi(r) = \frac{\alpha e^{-kr}}{4\pi Dr} + \frac{e^{-\Sigma' r}}{4\pi r^2}, \tag{2.340}$$

unde k este dat de expresia

$$\frac{k}{\Sigma} \operatorname{tg} \frac{\Sigma}{k} = 1$$

sau

$$k \simeq \sqrt{3\Sigma\Sigma_a(1-\bar{\mu})\left(1 - \frac{2}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)},$$

$$\Sigma' = \frac{5}{4}\Sigma;\ \alpha = 1 - \frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma};\ D = \frac{\Sigma_a}{k^2}.$$

De notat că expresia $\frac{k}{\Sigma} \operatorname{tg} \frac{\Sigma}{k} = 1$ reprezintă transformata Fourier a nucleului de difuzie $\frac{e^{-kr}}{4\pi Dr}$, unde expresiile pentru α și Σ' sînt valabile la $\Sigma_a \ll \Sigma$, iar expresiile pentru D și k la orice Σ și Σ_a.

În acest caz, nucleul integral de transport pentru sursa punctiformă în mediu infinit devine

$$K_{p.tr}(|r-r'|) = \frac{\alpha e^{-k|r-r'|}}{4\pi D|r-r'|} + \frac{e^{-\Sigma'|r-r'|}}{4\pi|r-r'|^2}, \tag{2.341}$$

a cărui eroare este $<1\%$. Acest nucleu poate fi pus sub o formă mai comodă dacă observăm că cel de-al doilea membru se poate scrie

$$\frac{e^{-\Sigma' r}}{4\pi r^2} = D\int_{\Sigma'}^{\infty} \frac{e^{-k'r}}{4\pi Dr}\, dk', \tag{2.342}$$

pentru a arăta că nu numai primul membru (Φ_{as}), ca și al doilea (Φ_{tr}) este de fapt soluția unei ecuații de difuzie și că deci o soluție corectă a ecuației de transport se poate obține (în medii infinite și omogene) printr-o combinație potrivită de nuclee de difuzie. Avem

$$\Phi_{tr}(r) = D\int_{\Sigma'}^{\infty} \Phi(k', r)\, dk', \tag{2.343}$$

în care

$$\Phi(k', r) = \int S(r') \frac{e^{-k'|r-r'|}}{4\pi D|r-r'|}\, dr' \tag{2.344}$$

este soluția unei ecuații de difuzie de tip

$$D[\Delta\Phi(k', r) - k'^2\Phi(k', r)] + S(r) = 0. \tag{2.345}$$

Analiza atentă a expresiei arată că ea reprezintă de fapt densitatea primelor ciocniri ale neutronilor care provin direct din sursă în funcție de intensitatea ei. Într-adevăr, în cazul unei surse punctiforme de neutroni rapizi de intensitate unitate, numărul de neutroni la suprafața sferei de rază r cu centrul în sursă este $\frac{1}{4\pi r^2}$, iar probabilitatea ca prima ciocnire să aibă loc în pătura sferică de rază r este $\Sigma_s e^{-\Sigma_s r}$. Nucleul corespunzător se numește nucleu de primă ciocnire sau nucleu de transport și este de fapt tot un nucleu de difuzie, după cum se vede în (2.342), dar cu parametrii corectați.

Scanned with OKEN Scanner

Aici se observă mai clar avantajul metodei nucleelor, deoarece nucleul integral de transport pentru sursa punctiformă, dedus prin aproximația asimptotică a ecuației de transport, se poate obține și din raționamente directe asupra probabilității procesului.

Un frumos exemplu de deducere simplă a nucleului integral al ecuației Boltzmann doar prin definirea unor probabilități ale procesului este dat în lucrarea [K—1].

Autorul ține seama de dezintegrarea neutronilor, de împrăștierea lor, de absorbția lor cu formare de nuclee radioactive, care emit neutroni întîrziați și de fisiunile rapide și intermediare alături de cele termice, atribuind fiecăruia dintre acese procese o probabilitate. Exprimînd cu aceste probabilități bilanțul tuturor neutronilor în unitatea de timp și de interval de energie, se obțin două ecuații integrale pe care le satisface nucleul integral $K(t', r', v', t, r, v)$ căutat. Cele două ecuații reprezintă de fapt bilanțul primei ciocniri și ultimei ciocniri a neutronilor, iar combinarea lor prin metoda lui Janossy conduce ușor la ecuația integro-diferențială a lui Boltzmann. Amintim că obținerea acesteia în condițiile amintite prin metodele clasice ar fi fost dificilă, în timp ce rezolvarea ei ar fi fost extrem de dificilă. Transformarea inversă a ecuației integro-diferențiale a lui Boltzmann în cele două ecuații integrale referitoare la prima și la ultima ciocnire, ecuații satisfăcute de nucleul integral căutat, se obține prin metoda dată în lucrarea [C—1].

În continuare, autorul consideră cazul mediului omogen (cînd proprietățile mediului sînt independente de r și t) și găsește ecuația care definește nucleul integral K:

$$K - A - \Phi K = 0, \tag{2.346}$$

unde

$$A \equiv \mathrm{e}^{-p(v')t}\,\delta(r - v't)\,\delta(v - v'),$$

$$\Phi K \equiv \int_0^t \int_\tau^t \int \mathrm{e}^{-p(v')\tau} K\left[Q\,\delta(\sigma - \tau) + \sum_i R_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i(\sigma-\tau)}\right] \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}w.$$

Soluția acestei ecuații se obține prin iterație și cea de-a n-a aproximație a nucleului K este dată de

$$K_n = A + \Phi A + \Phi^2 A + \ldots + \Phi^{n-1} A + \Phi^n K_0, \tag{2.347}$$

unde K_0 este prima aproximație a nucleului integral K.

Pentru t mic, $K_0 = A$ este o aproximație suficient de bună a nucleului, dar pentru t mare autorul găsește că funcția generalizată a lui Chandrasekhar (care dă probabilitatea analogă în cazul mișcării browniene) este o bună aproximație dacă se introduc corecții care să țină seama de faptul că neutronii nu sînt de obicei în echilibru termic cu mediul

și pot să apară (în fisiune) și să dispară (prin absorbție). În acest caz nucleul integral este dat de

$$K_0(t,r,v,v') = \frac{\beta^3}{\pi^3 a^3 b^3 (1-\lambda^2)^{3/2}(\beta t - 2\mu)} \times$$
$$\times \exp\left[-\alpha t - \frac{v - n\lambda}{a^2(1-\lambda)} - \frac{(\beta r - (v'+v)\mu)^2}{b^2(\beta t - 2\mu)}\right], \tag{2.348}$$

unde

$$\lambda \equiv e^{-\beta t} \quad ; \quad \mu \equiv \frac{1-e^{-\beta t}}{1+e^{-\beta t}}.$$

Datorită faptului că nucleul de primă ciocnire reprezintă neutronii încetiniți pînă la energia termică printr-o singură ciocnire, el reprezintă mai bine decît alte nuclee încetinirea și difuzia în hidrogen. De asemenea el reprezintă mult mai bine neutronii din vecinătatea surselor (sau a marginilor, care pot fi considerate surse negative), la care probabilitatea de a fi suferit o ciocnire este cu atît mai mare cu cît ne aflăm mai aproape de sursă. Acesta este un avantaj net față de nucleele de difuzie, care nu sînt corecte în vecinătatea surselor sau a marginilor. De fapt în cazul real (la moderatori ușori), majoritatea neutronilor rapizi parcurg distanța cea mai mare în timpul încetinirii pînă la prima ciocnire. Deși în medie neutronii suferă mai multe ciocniri, acestea vor avea loc în apropierea punctului de primă ciocnire și deci și termalizarea va avea loc în apropiere, ceea ce explică succesul acestei aproximații.

Printr-un artificiu de calcul putem însă considera că orice ciocnire a neutronilor poate fi tratată ca „primă" ciocnire, presupunînd că un neutron care suferă orice tip de ciocnire este „absorbit" și dă naștere la $(1+f)$ noi neutroni în același punct.

Este suficient să notăm $f = 0$ pentru ciocnirea împrăștiantă, $f = -1$ pentru captura reală și $f = \nu - 1$ pentru fisiune pentru a acoperi (cuprinde) toate cazurile posibile.

Revenind la nucleul de transport, putem trage concluzia că, întrucît el poate fi considerat drept suma a două nuclee de difuzie (cu parametrii modificați), soluția ecuației integrale de transport poate fi bine aproximată de soluții potrivit alese ale ecuației elementare de difuzie.

Aceasta poate fi considerată și ca o nouă demonstrație a valabilității aproximației elementare de difuzie a teoriei transportului, efectuată prin intermediul metodei nucleelor integrale.

Prin analogie cu cazul nucleelor de difuzie, nucleele de transport se pot deduce unele din altele pentru diverse geometrii (vezi tabela 2.2), permițînd deci în multe cazuri ocolirea dificultăților legate de soluționarea directă a ecuației de transport în cazul geometriilor complexe.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, relațiile deduse pentru nucleele de difuzie devin în cazul nucleelor de transport

$$K_{\text{pl.Tr}}(z, 0) = 2\pi \int_z^\infty r\, K_{\text{p.T}}(r, 0)\, \mathrm{d}r \tag{2.349}$$

sau

$$K_{\text{p.Tr}}(r, 0) = \left[-\frac{1}{2\pi z} \frac{\mathrm{d}K_{\text{pl.Tr}}(z, 0)}{\mathrm{d}z} \right]. \tag{2.350}$$

Ținînd seama de

$$K_{\text{p.Tr}}(r, 0) = \frac{\mathrm{e}^{-\Sigma r}}{4\pi r^2}, \tag{2.351}$$

putem scrie (2. 349) sub forma

$$K_{\text{pl.Tr}}(z, 0) = \frac{1}{2} \int_z^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\Sigma r}}{r}\, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} E_1(x), \tag{2.352}$$

unde $y = \Sigma r$ și $x = \Sigma z$. Funcția $E_1(x)$ este tabelată.

TABELA 2.2

Nuclee de încetinire și de transport (sau de primă ciocnire) [w — 1]

Geometria sursei	Nucleul de încetinire (nucleu gaussian)	Nucleul de transport (nucleu Milne)
Punct	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\lvert r-r' \rvert^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\Sigma_{\text{tr}} \lvert r-r' \rvert}}{4\pi \lvert r-r' \rvert^2}$
Plan	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\lvert z-z' \rvert^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{1/2}}$	$\dfrac{1}{2} E_1(\Sigma_{\text{tr}} \lvert z-z' \rvert) E_1(x) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{E}\, \mathrm{d}t$
Linie	$\dfrac{\mathrm{e}^{-s^2/4\tau}}{4\pi\tau}$	$\dfrac{\Sigma_{\text{tr}}}{2\pi} \displaystyle\int_1^\infty K_0(\Sigma y \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\Phi'-\Phi)})\, \mathrm{d}y$
Pătură sferică de rază r'	$\dfrac{1}{4\pi rr'} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-\lvert r-r' \rvert^2/4\tau} - \mathrm{e}^{-\lvert r+r' \rvert^2}}{(4\pi\tau)^{1/2}}$	$\dfrac{[E_1(\Sigma_{\text{tr}} \lvert r-r' \rvert) - E_1(\Sigma_1 \lvert r+r' \rvert)]}{8\pi rr'}$
Pătură cilindrică de rază r'	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{r^2+r'^2}{4\tau}}}{4\pi\tau} I_0\left(\dfrac{rr'}{2\tau}\right)$	$\dfrac{\Sigma_{\text{tr}}}{2\pi} \displaystyle\int_1^\infty K_0(\Sigma r y)\, I_0(\Sigma r' y)\, \mathrm{d}y \quad r > r'$ $\dfrac{\Sigma_{\text{tr}}}{2\pi} \displaystyle\int_1^\infty K_0(\Sigma r' y)\, I_0(\Sigma r y)\, \mathrm{d}y \quad r < r'$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul mediului infinit vom avea un nucleu de transport de deplasare, care va fi notat

$$K_{\text{pl.Tr}}(|z - z'|) = \frac{1}{2} E_1(\Sigma |z - z'|). \tag{2.353}$$

Se poate deduce o expresie remarcabilă care leagă nucleul de transport de cel de difuzie. Astfel, din expresiile (2.352) și (2.353) rezultă

$$K_{\text{pl.Tr}}(z, z') = D\int_{\Sigma}^{\infty} K_{\text{pl.D}}(k, z, z')\,dk, \qquad k = \frac{1}{L}. \tag{2.354}$$

Relații asemănătoare permit deducerea nucleelor de transport din cele de difuzie și pentru alte geometrii.

De remarcat că nucleul de transport pentru sursa punctiformă sau plană este mult folosit la calculul atenuării radiației γ (cînd Σ se înlocuiește cu coeficientul de absorbție μ).

Ecuațiile integrale cu nuclee de transport sînt cunoscute ca ecuații integrale de tip Milne și rezultatele obținute în studiul lor (de obicei prin transformatele Fourier și teorema lor de convoluție) pot fi folosite în problemele tipice de fizică a reactorilor.

2.5.3. Nuclee de încetinire

O sursă de imprecizie a nucleelor prezentate pînă acum o constituie faptul că nu am luat în considerare decît neutronii monoenergetici.

Luarea în considerare a distribuției energetice a neutronilor se face prin intermediul așa-numitelor nuclee de încetinire, care reprezintă de fapt soluții ale ecuației de încetinire a neutronilor pentru surse distribuite.

Dacă aceste ecuații se bazează pe modelul încetinirii continue (modelul vîrstei Fermi), vom obține nucleele „vîrstă" Fermi, iar dacă ele se bazează pe modelul multigrup vom obține nucleele multigrupale de încetinire (vezi tabela 2.2). Astfel, de exemplu, nucleul de încetinire pentru sursa punctiformă este

$$K_{\text{p.sl}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{1}{[4\pi\tau(E)]^{3/2}} e^{-r^2/4\tau(E)}, \tag{2.355}$$

care este soluția ecuației „vîrstei"

$$D\Delta K_{\text{p.sl}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{\partial K_{\text{p.sl}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}{\partial t}.$$

Un astfel de nucleu de încetinire punctiform reprezintă fizic densitatea de încetinire a neutronilor de vîrstă τ în punctul r datorită sursei unitate punctiforme de neutroni de vîrstă τ' din punctul r' sau probabili-

Scanned with OKEN Scanner

tatea pe unitate de volum că un neutron emis cu vîrsta τ' se va încetini la vîrsta τ pînă la punctul r. Matematic aceasta se exprimă astfel :

$$q(\mathbf{r}, E_{th}) = \int \frac{k}{p} \Sigma \Phi(\mathbf{r}') K_{p.sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E_{th}) \, d\mathbf{r}' \qquad (2.356)$$

sau

$$q(\mathbf{r}, \tau) = \int q(\mathbf{r}', 0) K_{p.sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, d\mathbf{r}'. \qquad (2.357)$$

În cazul mediului infinit, nucleul de încetinire devine de asemenea un nucleu de deplasare. Datorită analogiei cu funcția Gauss, nucleele de încetinire continuă (nuclee „vîrstă") se mai numesc nuclee gaussiene.

După cum se știe însă, modelul încetinirii continue nu este aplicabil decît în cazul unui moderator nu prea ușor. În cazul foarte des întîlnit în practică al moderării în H_2O sau D_2O, trebuie folosite nuclee mai corecte. În acest caz, încetinirea pînă la energia termică are loc după un număr mic de ciocniri.

Din această cauză, o primă aproximație ar fi folosirea nucleelor de primă ciocnire (nuclee de transport), care au fost descrise. Cum nici o singură ciocnire nu descrie corect procesul fizic al încetinirii în moderatori ușori, se preferă folosirea nucleelor sintetice sau nucleele multigrupale,

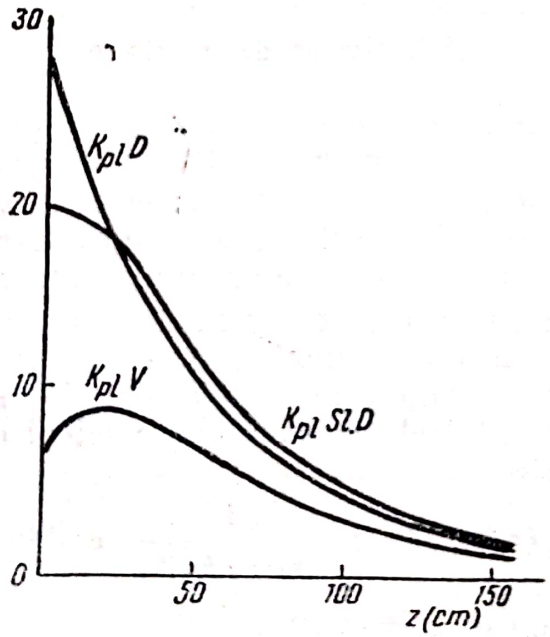


Fig. 2.7.

în care se adoptă modelul mai corect al încetinirii pe grupe energetice de neutroni.

În cadrul fiecărei grupe, neutronii nu se mai încetinesc, ci doar difuzează, ceea ce permite reprezentarea lor prin nuclee de difuzie-grup (numite și nuclee de difuzie-încetinire) (vezi fig. 2.7).

Astfel, în cazul sursei punctiforme, în mediu infinit nucleul de difuzie pentru grupul i are forma

$$K_{\text{p.Di}}(|r_{i+1}-r_i|)=\frac{e^{-|r_{i+1}-r_i|/L_i}}{4\pi L_i^2|r_{i+1}-r_i|}, \tag{2.358}$$

$$L_i^2\equiv\frac{D_i}{\Sigma_i};\quad \Sigma_i\equiv\frac{\bar{\Sigma}_i}{\frac{1}{\xi}\log\frac{E_i}{E_{i+1}}},$$

iar nucleul total de încetinire devine

$$K_{\text{p.sl}}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,E,E_{\text{th}})=\prod_{i=0}^{n}K_{\text{p.Di}}(|\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i|). \tag{2.359}$$

De exemplu, în cazul bigrup avem

$$K_{\text{p.sl}}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E,E_{\text{th}})=\frac{1}{4\pi r(L_1^4+L_2^4)}[L_1^2e^{-r/L_1}+L_2^2e^{-r/L_2}].$$

Pînă acum, în deducerea acestor nuclee s-a presupus că în timpul încetinirii nu există absorbție a neutronilor, dar, în cazul mai general al încetinirii cu absorbție, luarea ei în considerare se face prin simpla înmulțire a nucleului, cu probabilitatea p de evitare a capturii la rezonanță:

$$K_{\text{sl.abs}}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E,E_{\text{th}})=p(E)K_{\text{sl.real}}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E,E_{\text{th}}). \tag{2.360}$$

Din relația de mai sus și din definiția lui p ca probabilitate de evitare a capturii la rezonanță a neutronilor se deduce și o folositoare condiție de normare a nucleelor integrale de încetinire:

$$\int K_{\text{sl}}(\mathbf{r},\mathbf{r}',E)\,dr=p(E). \tag{2.361}$$

2.5.4. Nuclee de difuzie și de încetinire

Metoda nucleelor integrale se poate extinde în mod simplu și natural la problema mai complexă a încetinirii urmate de difuzie. În timp ce în alte metode de aproximare tratarea acestei probleme este deosebit de dificilă și mai ales greu de urmărit intuitiv, în metoda nucleelor se definește simplu nucleul integral de încetinire-difuzie prin produsul nucleelor separate de încetinire (fie în modelul vîrstei, fie în modelul multigrupal) și de difuzie. În ultimul caz (modelul multigrupal și difuzie) se obține de fapt chiar nucleul de încetinire multigrupal, discutat în paragraful precedent.

Scanned with OKEN Scanner

Ca exemplu vom deduce nucleul integral de încetinire (vîrstă) difuzie în geometrie plană

$$K_{\text{pl.sl}-\text{D}}(x, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x-x')^2/4\tau}\, e^{-k|x-x'|}\, dx'}{(4\pi\tau)^{3/2}\, 2kD}, \tag{2.362}$$

care prin integrare duce la

$$K_{\text{pl.sl}-\text{D}}(x, 0) =$$

$$= \frac{e^{k^2 z}}{4ks}\left\{e^{-kx}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - k\sqrt{\tau}\right)\right] + e^{kx}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + k\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}, \tag{2.363}$$

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}\, d\alpha;$$

(Pentru definiția funcției erf x vezi Anexa).

În mod analog se poate obține nucleul de încetinire-difuzie și în alte geometrii sau combinații de modele.

În prezența combustibilului, care reprezintă atît o sursă de neutroni rapizi, cît și o „sursă negativă" de neutroni termici (de fapt o absorbție), nucleul are o formă mai complicată. Astfel, amintindu-ne că fizic un astfel de nucleu încetinire-difuzie reprezintă (pentru un mediu infinit) fluxul de neutroni termici dintr-un punct r datorați unei surse punctiforme de neutroni rapizi din punctul r', putem considera că pentru fiecare neutron termic absorbit în combustibil apar η neutroni rapizi de fisiune, sau, cu alte cuvinte, pentru fiecare neutron rapid apărut sînt absorbiți $1/\eta$ neutroni termici. În acest caz, din numărul total $K_{\text{sl}-\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de neutroni ce se încetinesc și difuzează ca termici va trebui să scadem neutronii termici absorbiți dați de $\frac{1}{\eta} K_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, rezultatul fiind un nou nucleu integral de încetinire-absorbție, care ține seama mai corect de absorbția în combustibil

$$K_{\text{V}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[K_{\text{sl}-\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{\eta} K_{\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right]. \tag{2.364}$$

Aici indicele V provine de la denumirea de nucleu „vulcan", dată acestui nucleu integral datorită asemănării distribuției pe care o reprezintă cu secțiunea printr-un vulcan simetric.

Un nucleu asemănător se obține și în cazul important din punct de vedere practic al reactorului reflectat (așa-numita metodă Goertzel-Loeb). Simplificarea care se obține în acest caz prin considerarea neutronilor monoenergetici permite deducerea unor expresii folositoare. Astfel nucleul de încetinire-difuzie devine un nucleu de difuzie

$$K_{\text{p.sl}-\text{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \to K_{\text{p.D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{2.365}$$

iar nucleul „vulcan" devine

$$K_{p.v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{(\eta - 1)}{\eta} K_{p.D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tag{2.366}$$

care ne permite să exprimăm fluxul termic sub forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \Phi(\mathbf{r}') \Sigma_f \nu \frac{(\eta - 1)}{\eta} K_{p.D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \tag{2.367}$$

unde $\Sigma_f \Phi \nu$ este densitatea sursei de neutroni rapizi.

Considerînd grosimea reflectorului H, se construiește o expresie variațională în care drept funcție inițială se ia chiar fluxul de mai sus constant. Înmulțind expresia de mai sus în ambii membri cu $\Phi(r)$ și integrînd, se obține

$$\frac{\int \Phi(\mathbf{r})\, dr \int \Phi(\mathbf{r}') \frac{(\eta - 1)}{\eta} K_{p.D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, dr'}{\int \Phi^2(\mathbf{r})\, dr} = \frac{1}{\Sigma_{an}}, \tag{2.368}$$

din care se deduce și condiția de criticitate sub o formă remarcabilă dependentă de grosimea reflectorului:

$$\frac{(1 - f)}{f(\eta - 1)} = 1 - \frac{L}{H}(1 - e^{H/L}). \tag{2.369}$$

Această expresie tinde la reactori mari spre soluția integrală

$$\frac{(1 - f)}{f(\eta - 1)} = 1 - \cos^2 \frac{BH}{2}. \tag{2.370}$$

Nucleul „vulcan" mai este folosit cu succes și la determinarea distribuției combustibilului în reactorii în care se cere o generare uniformă a puterii (cunoscuta problemă a aplatizării fluxului întîlnită în cazul practic al reactorilor nucleari energetici).

Reactorul constituind de fapt o sursă distribuită de neutroni rapizi, fluxul termic se poate scrie

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{ZA} \Phi(\mathbf{r}') \Sigma_f(\mathbf{r}') \nu K_v(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \tag{2.371}$$

unde K_v este chiar nucleul vulcan, iar integrarea se efectuează pe tot volumul zonei active.

Pentru generarea uniformă a puterii pe unitatea de masă de combustibil, trebuie ca puterea să fie proporțională cu $\Sigma_f(\mathbf{r})\, \Phi(\mathbf{r})$. Dar $\Sigma_f(\mathbf{r})$ este

Scanned with OKEN Scanner

proporțională cu densitatea combustibilului, deci (neglijînd fisiunile epitermice) pentru o generare uniformă a puterii în aceste condiții este suficient ca $\Phi(\mathbf{r})$ să fie constant, ceea ce conduce la relația

$$\int_{ZA} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}') K_\nu(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d\mathbf{r}' = 1. \tag{2.372}$$

Din această relație se deduce ușor masa critică minimă necesară unui flux aplatisat (constant cu r) (vezi § 2.5.6).

Practic se construiește o zonă activă mai mică decît cea critică, iar criticitatea se obține prin mărirea concentrării combustibilului spre marginea zonei active cu reflectorul.

Pentru generarea uniformă a puterii pe unitatea de volum a zonei active, trebuie ca $\Sigma_f(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r})$ să fie constantă. În acest caz se deduce că distribuția secțiunii de fisiune, deci a densității de combustibil este dată de

$$\Sigma_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\nu \int K_\nu(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, d\mathbf{r}'} \tag{2.373}$$

2.5.5. Nuclee finite

În majoritatea cazurilor, problemele practice necesită luarea în considerare a nucleelor integrale pentru medii finite, în timp ce nucleele descrise pînă acum erau nuclee pentru medii infinite (nuclee de deplasare). În cazul nucleelor finite, un calcul direct al lor ar fi deosebit de complex.

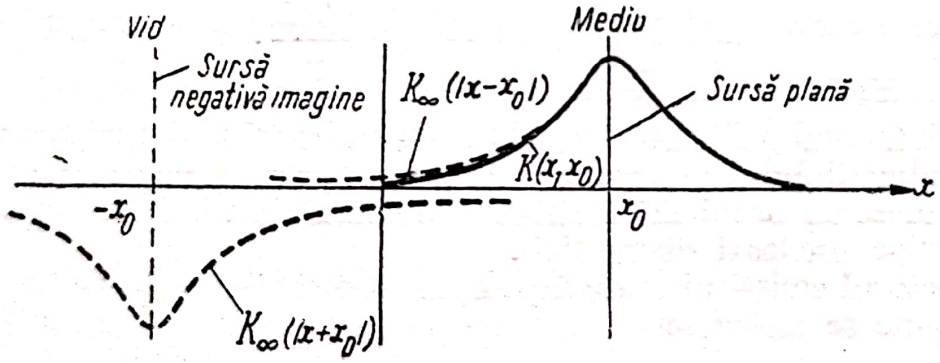


Fig. 2.8

Se folosește atunci așa-numita metodă a sursei negative (sau sursei imagine) (vezi fig. 2.8) pentru a demonstra că de fapt orice nucleu pentru mediu finit se obține prin diferența a două nuclee pentru medii infinite, unul conținînd sursa reală, iar celălalt sursa imagine. Cele două surse (sau distribuții de surse) sînt astfel alese pentru a satisface condiția reală,

încît la limita între medii (care este de fapt marginea reală a unui singur mediu real) densitatea de încetinire și deci și nucleul respectiv se anulează.

Un astfel de nucleu care să se anuleze la $r = 0$ în cazul geometriei plane va fi dat de

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = \frac{1}{[4\pi\tau(E)]^{1/2}} [e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\tau(E)} - e^{-|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|^2/4\tau(E)}]. \quad (2.374)$$

Valabilitatea acestei expresii care dă un nucleu finit prin suprapunerea unor nuclee infinite este posibilă numai datorită faptului că atît K^{∞}, cît și K^{finit} satisfac aceeași ecuație diferențială liniară.

Aceeași metodă a sursei imagine ne permite și deducerea expresiei inverse, care permite înlocuirea oricărui nucleu finit cu unul infinit.

Înlocuind pentru exemplificare un nucleu finit de forma (2.360) cu cel din (2.374) și efectuînd integrarea, obținem

$$I = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \int_0^{\infty} \Phi(\mathbf{r}')[e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\tau} - e^{-|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|^2/4\tau}]\, d\mathbf{r}',$$

$$I = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \left[\int_0^{\infty} \Phi(\mathbf{r}')\, e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\tau}\, d\mathbf{r}' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mathbf{r}')\, e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\tau}\, d\mathbf{r}' \right], \quad (2.375)$$

$$I = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mathbf{r}')\, e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\tau}\, d\mathbf{r}'$$

sau, cu alte cuvinte, nucleul finit de forma (2.360) a fost înlocuit cu un nucleu infinit de forma (2.375).

Această înlocuire, pe lîngă avantajul de a ne permite de a lucra numai cu nuclee infinite care se calculează mai ușor, mai are și avantajul de a conduce la transformarea ecuației integrale a teoriei transportului, la o ecuație integrală asimptotică a acestei teorii.

2.5.6. Nuclee integrale și transformatele Fourier

Una dintre cele mai elegante și mai comode aplicații ale nucleelor integrale în fizica reactorului se efectuează prin intermediul transformatelor Fourier ale acestor nuclee (vezi tabela 2.3) și se referă la calculul criticității reactorului, a lungimii de încetinire, a probabilităților de scăpare, etc. Marele avantaj al acestei metode constă în faptul că se poate exprima condiția de criticitate în funcție de un nucleu experimental fără a mai recurge la vreun model matematic care descrie destul de aproximativ procesul de încetinire.

Pornind de la ecuația fundamentală a reactorului

$$\Delta\Phi_n(\mathbf{r}) + B_n^2 \Phi_n(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.376)$$

Scanned with OKEN Scanner

și introducînd transformata Fourier a lui $\Phi_n(\mathbf{r})$ dată de

$$\overline{\Phi}_n(\alpha) = \int_s e^{i\alpha r}\, \Phi_n(\mathbf{r})\, dr, \tag{2.377}$$

TABELA 2.3

Nuclee de încetinire pentru sursa punctiformă și pentru diverse modele de încetinire [1 – 1]

Modelul încetinirii	Nucleu de încetinire $K(\lvert r - r' \rvert E)/p(E)$	Transformata Fourier a nucleului $\overline{K}(B^2, E)/p(E)$	Condiția de criticitate $\frac{k\overline{K}(B^2, E)}{p\lvert 1 + L^2B^2 \rvert} = 1$
Monogrup termic	$\delta(\rho)$	1	$\frac{k}{(1 + L^2 B^2)} = 1$
Grupul rapid din modelul bigrup	$\frac{e^{-\lvert r-r' \rvert/L_1}}{4\pi L_1^2 \lvert r - r' \rvert}$	$\frac{1}{(1 + L_i^2 B^2)}$	$\frac{1}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L^2B^2)} = 1$
Multigrup	suprapunere de nuclee de încetinire	$\prod_{i=1}^{n} (1 + L_i^2 B^2)^{-1}$	$k \prod_{i=1}^{n} \frac{(1 + L_i^2 B^2)^{-1}}{(1 + L^2B^2)} = 1$
Încetinire continuă (modelul vîrstei)	$\frac{e^{-\lvert r-r' \rvert^2/4\tau(E)}}{[4\pi\tau(E)]^{3/2}}$	$e^{-B^2\tau}$	$\frac{k\, e^{-B^2\tau}}{1 + L^2B^2} = 1$
Prima ciocnire (nucleu de transport)	$\frac{\Sigma\, e^{-\Sigma \lvert r-r' \rvert}}{4\pi \lvert r - r' \rvert^2}$	$\frac{\Sigma}{B} \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{\Sigma}$	$\frac{k\Sigma \operatorname{tg}^{-1}(B/\Sigma)}{B(1 + L^2 B^2)} = 1$
Modele sintetice	Se folosesc valori empirice pentru L_i^2		

obținem transformata Fourier a ecuației fundamentale:

$$-\alpha^2 \overline{\Phi}_n(\alpha) + B_n^2 \overline{\Phi}_n(\alpha) = 0, \tag{2.378}$$

$$(B_n^2 - \alpha^2)\overline{\Phi}_n(\alpha) = 0,$$

din care rezultă că $\overline{\Phi}_n(\alpha)$ este diferit de zero numai dacă $\alpha^2 = B_n^2$. Folosind acest rezultat, precum și transformata Fourier inversă, putem exprima fluxul de neutroni prin

$$\Phi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S_\alpha} e^{-iB_n \mathbf{r}}\, \overline{\Phi}_n(\alpha) d\alpha. \tag{2.379}$$

Densitatea de încetinire, a cărei expresie a fost dedusă în § 2.5.3,

$$q(\mathbf{r}, E) = \int_S \sum_n q_n\, \Phi_n(r^2)\, K_{sl}(\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert, E)\, dr', \tag{2.380}$$

în care am înlocuit nucleul finit K_{sl} $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)$ printr-un nucleu infinit (de deplasare), devine după introducerea expresiei lui $\Phi_n(\mathbf{r})$

$$q(\mathbf{r}, E) = \int_S \sum_n q_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S_\alpha} e^{-iB_n \cdot \mathbf{r}'} \Phi_n(\alpha)\, d\alpha\, K_{sl}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^2|, E)\, d\mathbf{r}'. \quad (2.381)$$

Dacă se ține seama de faptul că

$$e^{-iB_n \cdot \mathbf{r}'} = e^{-iB_n \mathbf{r}}\, e^{iB_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (2.382)$$

și că $d\mathbf{r}'$ este echivalent în $\mathbf{r}'$ cu $d(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$, expresia densității de încetinire devine

$$q(\mathbf{r}, E) = \int_S \sum_n q_n \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S_\alpha} e^{-iB_n \cdot \mathbf{r}}\, \bar{\Phi}_n(\alpha)\, d\alpha \cdot e^{iB_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} K_{sl}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\, d(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (2.383)$$

în care recunoaștem în cea de-a doua integrală atît transformata Fourier inversă a lui $\bar{\Phi}_n(\mathbf{r})$, cît și transformata Fourier a lui $K_{sl}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), E)$, deci

$$q(\mathbf{r}, E) = \sum_n q_n \Phi_n(\mathbf{r})\, \overline{K}_{sl}(B_n^2, E). \quad (2.384)$$

Aceasta este o relație remarcabilă în care integrarea a dispărut, iar nucleul transformat Fourier depinde chiar de valorile proprii B_n^2 ale ecuației reactorului, care sînt legate direct de condiția de criticitate căutată. Transformarea de mai sus este permisă numai în cazul că ecuația pentru densitatea de încetinire $q(r, E)$ este liniară și omogenă, ceea ce se adevereşte în cazul modelelor obișnuite de încetinire (vîrstă, multigrup etc.).

Înainte însă de a deduce condițiile de criticitate, mai amintim că transformata Fourier a nucleului integral de încetinire mai este utilă și la determinarea unei mărimi importante: probabilitatea de evitare a capturii la rezonanță a neutronilor și mai general a probabilității neutronilor de a nu scăpa din zona activă în cursul încetinirii.

Prin definiție, probabilitatea p a evitării capturii neutronilor la rezonanță este

$$p = \frac{\text{nr. de neutroni ce devin termici}}{\text{nr. de neutroni emiși de sursă}} = \frac{q_n(\mathbf{r}, E_{th})}{q_n(\mathbf{r}, E)} = \frac{K_{sl}(B_n^2, E_{th})}{K_{sl}(B_n^2, E)},$$

unde am ținut seama de faptul că numărul neutronilor care devin termici este proporțional cu densitatea de încetinire pînă la energia E_{th}, numărul de neutroni emiși de sursă este proporțional cu densitatea de încetinire la energia E a sursei, iar aceste două densități de încetinire sînt proporționale cu transformatele Fourier inverse ale nucleelor integrale corespunzătoare (conform expresiei 2.384).

Scanned with OKEN Scanner

Dar pentru E (energia neutronilor sursei) $\tau = 0$ și $p = 0$ și deci $\overline{K}_{sl}(B_n^2, E) = 1$, iar pentru restul intervalului de încetinire avem

$$p = \overline{K}_{sl}(B_n^2, E_{th}) \equiv \overline{K}_{sl}(B_n^2). \tag{2.385}$$

În cazul mediului finit, deoarece mai există scăpări de neutroni în timpul încetinirii, transformata Fourier $\overline{K}_{sl}(B_n^2)$ reprezintă în mod mai general probabilitatea neutronilor de a nu scăpa prin nici un proces (absorbție sau scăpări în exterior) din zona activă în cursul încetinirii.

Sub această formă, care exprimă densitatea de încetinire în funcție de transformata Fourier a nucleului de încetinire, relația de mai sus reprezintă *cea de-a doua teoremă fundamentală a fizicii reactorului* (prima referindu-se la valabilitatea separării fluxului de neutroni în componenta spațială și cea temporală sau spațială și unghiulară).

Cea de-a doua teoremă fundamentală enunțată mai sus și implicit nucleele integrale și transformatele lor Fourier permit o nouă abordare a calculului criticității.

Se pornește de obicei de la ecuația generală de transport

$$D\,\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + \int_v \left[\frac{k}{p}\Sigma_a \Phi(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r}')\right] K_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E_{th})\, d\mathbf{r} = \frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \tag{2.386}$$

Înlocuind

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n \Phi_n(\mathbf{r})\, T_n(t),$$

$$S(\mathbf{r}) = \sum_n S_n(\mathbf{r})\, \Phi_n(\mathbf{r}), \tag{2.387}$$

$$q(\mathbf{r}, E) = \sum_n q_n \Phi_n(\mathbf{r})\, \overline{K}_{sl}(E, B_n^2),$$

se obține o ecuație a cărei soluție generală are forma

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \left[A_n' \Phi_n(\mathbf{r})\, e^{-(k_{n,ef}-1)t/l n} + \frac{S_n(\mathbf{r})\, \Phi_n(\mathbf{r})\, \overline{K}_{sl}(B_n^2)}{\Sigma_a (1 + L^2 B_n^2)(1 - k_{n,ef})}\right], \tag{2.388}$$

unde

$$k_{n,ef} \equiv \frac{k\, \overline{K}_{sl}(B_0^2)}{p\,(1 + L^2 B_0^2)}. \tag{2.389}$$

Primul termen este datorat fisiunilor, iar cel de-al doilea contribuției (eventuale) a surselor externe. Pentru ca procesul să fie staționar (adică $\Phi(r, t) = \text{const}$), este necesară condiția $k_{0,ef} = 1$, iar sursele externe să dispară.

Scanned with OKEN Scanner

Deci condiția de criticitate a reactorului devine

$$k_{0,\,ef} = \frac{k\,\overline{K}_{sl}(B_0^2)}{p\,(1 + L^2 B_0^2)} = 1. \tag{2.390}$$

La aceeași formă a condiției de criticitate se ajunge mai simplu pornind chiar de la aproximația difuziei:

$$D\,\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r}) + S = 0. \tag{2.391}$$

Înlocuind

$$D = L^2\,\Sigma_a,$$

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) = -\,B^2\,\Phi(\mathbf{r}), \tag{2.392}$$

$$S = \frac{k\,\Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r})}{p}\,\overline{K}_{sl}(B^2),$$

obținem

$$\begin{gathered} -\,L^2\,\Sigma_a\,B^2\,\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r}) + \frac{k\,\Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r})}{p}\,\overline{K}_{sl}(B^2) = 0, \\ \frac{k\,\overline{K}_{sl}(B^2)}{p\,(1 + L^2 B^2)} = 1. \end{gathered} \tag{2.393}$$

Pentru evaluarea transformatei Fourier $\overline{K}_{sl}(B_0^2)$ scriem relația care o leagă de nucleul netransformat,

$$\overline{K}_{sl}(B^2) = \int_s e^{iB(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\,\overline{K}_{sl}(|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'\,|)\,\mathrm{d}\,(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \tag{2.394}$$

care, în coordonate polare, devine

$$\overline{K}_{sl}(B^2) = 4\pi \int_0^\infty K_{sl}(\mathbf{r})\,\frac{\sin Br}{Br}\,r^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{2.395}$$

unde B^2 este valoarea proprie cea mai mică B_0^2 a ecuației de undă a reactorului.

Prin dezvoltare în serie Taylor a lui $\dfrac{\sin Br}{Br}$, (2.395) devine

$$\overline{K}_{sl}(B^2) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,B^{2n} \int_0^\infty r^{2n}\,K_{sl}(r)\,r^2\,\mathrm{d}r. \tag{2.396}$$

Folosind asemănarea integralei din această expresie cu cea care definește momentul de ordinul n al distribuției de încetinire, adică

$$\overline{r^{2n}} = \frac{4\pi \int_0^\infty r^{2n} K_{s1}(r)\, r^2\, dr}{4\pi \int_0^\infty K_{s1}(r)\, r^2\, dr}, \tag{2.397}$$

unde numitorul este chiar probabilitatea p de a evita captura la rezonanță, putem exprima integrala din (2.396) prin

$$I = \int_0^\infty r^{2n} K_{s1}(r)\, r^2\, dr = \frac{p}{4\pi}\, \overline{r^{2n}} \tag{2.398}$$

sau

$$\overline{K}_{s1}(B^2) = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2n+1)!}\, B^{2n}\, \overline{r^{2n}}. \tag{2.399}$$

Această relație ne permite să scriem condiția de criticitate (2.393) sub forma momentelor:

$$\frac{k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, B^{2n}\, \overline{r^{2n}}}{(1 + L^2B^2)} = 1. \tag{2.400}$$

Suma de la numărător se poate dezvolta sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, B^{2n}\, \overline{r^{2n}} \simeq \left[1 - \frac{1}{6} B^2 \overline{r^2} + \frac{1}{120} B^4 \overline{r^4} + \cdots\right]. \tag{2.401}$$

Pentru reactorii mari $B^2 \ll \frac{1}{r^2}$ și deci în dezvoltarea de mai sus ne putem opri la primii doi termeni. Dar $\overline{r^2}$ este distanța medie pătratică pe care o parcurge un neutron de la apariția lui în fisiune pînă devine termic, deci, după modelul încetinirii continue, reprezintă chiar de șase ori „vîrsta" Fermi (pentru sursă punctiformă);

$$\overline{r^2} = 6\tau. \tag{2.402}$$

Condiția de criticitate pe care o obținem deci din forma momentelor a metodei nucleelor integrale în cazul aproximației încetinirii continue și a dimensiunilor mari ale reactorului este

$$\frac{k(1 - \tau B^2)}{(1 + L^2B^2)} \approx \frac{k}{(1 + L^2B^2)(1 + \tau B^2)} = 1, \tag{2.403}$$

care coincide cu expresia obținută în aproximația bigrup.

În cazul dimensiunilor mici ale reactorului, aproximația vîrstei ia forma

$$\frac{ke^{-B^2\tau}}{1+L^2B^2}=1. \tag{2.404}$$

Expresia sub formă de momente a transformatei Fourier a nucleului integral de încetinire permite și o definire mai riguroasă a vîrstei neutronilor și deci corectarea expresiei clasice. Am văzut că pentru B^2 mic se poate scrie

$$\overline{K}_{sl}(B^2, E)=p\left[1-\frac{1}{\tau}r^2B^2\right]=\overline{K}_{sl}(B_n^2, E_{th})\left[1-\frac{1}{\tau}r^2B^2,\right] \tag{2.405}$$

$$\frac{\overline{r^2}}{6}=\frac{1}{B^2}\left[1-\frac{\overline{K}_{sl}(B^2, E)}{\overline{K}_{sl}(B^2, E_{th})}\right]. \tag{2.406}$$

Dar momentele spațiale prin care se pot exprima transformatele Fourier (și deci vîrstele neutronilor) se definesc fie în funcție de fluxul de neutroni $\Phi(r, E)$, fie în funcție de densitatea de încetinire $q(r, E)$, fie, în sfîrșit, în funcție de densitatea neutronilor $N(r, E)$, obținîndu-se momente diferite $\overline{r^2_\Phi}$, $\overline{r^2_q}$ sau $\overline{r^2_N}$.

Primele două momente, care se folosesc mai curent se exprimă analitic prin

$$\overline{r^2_\Phi}(E)=\frac{\int_0^\infty r^2\,\Phi(r, E)\,dV}{\int_0^\infty \Phi(r, E)\,dV}, \tag{2.407}$$

$$\overline{r^2_q}(E)=\frac{\int_0^\infty r^2 q(r, E)\,dV}{\int_0^\infty q(r, E)\,dV}. \tag{2.408}$$

În aproximațiile de încetinire mai corecte decît aproximația vîrstei nu se mai lucrează cu τ, ci cu $\overline{r^2}/6$, și de aceea modul cum se definește $\overline{r^2}$ în noile aproximații devine foarte important.

Prin intermediul relațiilor de mai sus, $\overline{r^2}/6$ definește în cazul sursei punctiforme o vîrstă de flux τ_Φ, respectiv o vîrstă de încetinire τ_q.

Întrucît $\overline{r^2_\Phi}$ se referă la distanța la care se găsesc neutronii cu o energie dată E, iar $\overline{r^2_q}$ se referă la distanța la care neutronii traversează

aceeași energie E, rezultă că în ultimul caz, față de primul, neutronii au trebuit să mai sufere o ciocnire (ultima), care le-a permis ca, avînd energia E, s-o „traverseze" (spre energii mai mici).

Cele două expresii sînt egale numai în cazul asimptotic, cînd densitatea de încetinire și fluxul sînt legate prin relația

$$q(u) = \xi \Sigma_S(u) \Phi(u). \tag{2.409}$$

Se definesc astfel cele două vîrste :

$$\tau_\Phi \equiv \frac{\overline{r_\Phi^2}}{6} = \lim_{B^2 \to 0} \frac{1}{B^2}\left[1 - \frac{\overline{K}_{sl,\Phi}(B^2, E)}{\overline{K}_{sl,\Phi}(B^2, E_{th})}\right], \tag{2.410}$$

$$\tau_q \equiv \frac{\overline{r_q^2}}{6} = \lim_{B^2 \to 0} \frac{1}{B^2}\left[1 - \frac{\overline{K}_{sl,q}(B^2, E)}{\overline{K}_{sl,q}(B^2, E_{th})}\right]. \tag{2.411}$$

Vîrsta de flux τ_Φ este mai mare decît vîrsta de încetinire τ_q, diferența fiind numită „corecția de ultimă ciocnire" și fiind exprimată prin

$$\tau_\Phi - \tau_q = \frac{\gamma D}{\xi \Sigma_S + \gamma \Sigma_a}, \tag{2.412}$$

unde

$$\gamma = \left[1 - \frac{\alpha \log^2 \alpha}{2\xi(1-\alpha)}\right]. \tag{2.413}$$

În modelul lui Greuling-Goertzel se obține expresia

$$\tau_\Phi - \tau_q = \frac{\gamma}{3\xi \Sigma_{tr} \Sigma_S}, \tag{2.414}$$

unde γ este dat de (2.413), iar

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2.$$

Corecția de ultimă ciocnire amintită mai sus și corecția de primă ciocnire (introdusă în § 2.5.2) constituie îmbunătățiri substanțiale în aproximarea corectă a încetinirii neutronilor în cazul moderatorilor ușori și au condus la obținerea unor nuclee integrale sintetice foarte bune (vezi nucleul Christy-Wheeler în § 2.5.7).

Din considerentele de mai sus s-a dedus și o expresie mai corectă a vîrstei neutronilor în apă și în amestecuri apă-aluminiu :

$$\tau = \frac{1}{B^2}\left[\frac{1}{\overline{K}_{sl}(B^2; 0{,}625)} - 1\right]. \tag{2.415}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pînă aici ne-am referit numai la surse punctiforme. Raționamente analoge se aplică și la alte geometrii. Astfel, în cazul sursei plane (de neutroni monoenergetici), vîrsta neutronilor se definește prin

$$\tau = \frac{\overline{z}^2}{2} \tag{2.416}$$

sau, în funcție de forma de momente a transformatei Fourier a nucleului de încetinire,

$$\tau = \frac{\overline{z}^2}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+2)!} B_\infty^{2n} \overline{z^{2n+2}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} B_\infty^{2n} \overline{z^{2n}}}, \tag{2.417}$$

unde $\overline{z^2}$ este momentul secund pentru mediul infinit, iar $\overline{z^n}$ este momentul de ordinul n pentru mediul finit, care se deduce din fluxurile de rezonanță (obținute, de exemplu, din diferența de activare a foițelor de indiu simple sau acoperite cu cadmiu) prin relații de forma

$$\overline{z^n} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^n \Phi_{rez}\, dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{rez}\, dz}. \tag{2.418}$$

În mod analog se deduce și aria de migrație în cazul unei surse plane

$$M^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \Phi\, dz}{\int_{8-}^{+\infty} \Phi\, dz}. \tag{2.419}$$

Luînd transformatele Fourier, expresia de mai sus devine

$$M^2 = \left| \frac{\partial^2 \overline{\Phi} / \partial \alpha^2}{-\overline{\Phi}} \right|_{\alpha=0}, \tag{2.420}$$

în care $\overline{\Phi}$ este transformata Fourier a lui Φ, iar α = variabila de transformare.

Scriind ecuația de difuzie-încetinire,

$$\Delta\Phi(z) + B^2 \Phi(z) + \frac{q(z, E)}{D} = 0, \tag{2.421}$$

și transformînd-o Fourier, avem

$$-\alpha^2 \overline{\Phi}(z) + B^2 \overline{\Phi}(z) + q(z, E)/D = 0, \tag{2.422}$$

care, cu o sursă de forma

$$\left[S\delta(z) + \frac{h}{p}\Sigma_a \Phi\right]\delta(z), \tag{2.423}$$

conduce la

$$\overline{\Phi}(z) = \frac{(S/\Sigma_a)p}{(1 + L^2\alpha^2)\, e^{\tau_{th}\alpha^2} - k} \tag{2.424}$$

și deci

$$M^2 = 2(\tau_{th} + L^2). \tag{2.425}$$

În cazul cel mai general al încetinirii pe grupe de energii avem

$$\frac{\overline{r}^2}{6} = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2, \tag{2.426}$$

unde

$$L_k^2 = D_k \lambda_{ak} = D_k/\Sigma_{ak}, \tag{2.427}$$

iar la limită avem în modelul încetinirii continue

$$\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} L_k^2. \tag{2.428}$$

Ca o aplicație a considerentelor de mai sus vom calcula lungimea caracteristică $\overline{r^2}$ în cazul nucleului de primă ciocnire și în cazul nucleului vîrstă-difuzie, pe care le vom compara cu valoarea dată de nucleul simplu al difuziei.

Scriind

$$\overline{r^2} = \frac{4\pi \int r^2 \Sigma_a \Phi(r)\, r^2\, dr}{4\pi \int \Sigma_a \Phi(r)\, r^2\, dr}, \tag{2.429}$$

obținem cu nucleul de difuzie

$$\overline{r^2} = 6L^2, \tag{2.430}$$

cu nucleul vîrstei

$$\overline{r}^2 = 6\tau, \tag{2.431}$$

cu nucleul de primă ciocnire

$$\overline{r^2} = \frac{(2/x)\,\Sigma_s^3 + (6/x^3)\,\Sigma_s}{(1/x)\,\Sigma_s} = 2\lambda_s^2 + 6\,L^2 \qquad (2.432)$$

$$x^2 \equiv \frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L}; \qquad \lambda_s \equiv \frac{1}{\Sigma_s}$$

și cu nucleul vîrstă-difuzie

$$\overline{r^2} = \frac{3\sqrt{\pi}\,(4\tau_{th})^{5/2}/8x + 6\sqrt{\pi}\,(4\tau_{th})^{3/2}/4x^3}{\sqrt{\pi}\,(4\tau_{th})^{3/2}/4x} = 6\tau_{th} + 6L^2. \qquad (2.433)$$

Deci distanța pătratică medie $\overline{r^2}$ parcursă pînă la absorbție de către neutronii rapizi este mai mare cu $2\lambda_s^2$ în cazul nucleului primei ciocniri față de cazul nucleului de difuzie și mai mare cu $6\,\tau_{th}$ în cazul nucleului vîrstă-difuzie.

Transformata Fourier a unui nucleu integral a mai fost folosită în mod elegant la calculul criticității în cazul complicat al unui ansamblu cilindric cu trei regiuni și cu capcană de neutroni tratat la trei grupe. Deși în această metodă se merge de la simplu la complex, în final se obțin totuși simplificări remarcabile. Într-adevăr, ecuațiile diferențiale de difuzie pentru cazul amintit sînt transformate cu ajutorul nucleelor integrale de difuzie într-un sistem de ecuații integrale (considerînd reflectorul infinit). Transformarea Fourier a acestui sistem conduce la o ecuație integrală de tip Fredholm cu nucleu degenerat (separabil pe diversele lui variabile), a cărei soluție se reduce la un sistem de ecuații liniare cu un număr infinit de necunoscute. Deoarece nucleul ecuației integrale este simetric, matricea infinită a acestui sistem este și ea simetrică și poate fi deci aproximată cu o matrice finită, care se poate evalua mai ușor.

O ultimă remarcă se referă la momentele de ordin zero și doi ale nucleului de fisiune, definit ca numărul de neutroni de fisiune produși într-un punct r datorită unui singur neutron de fisiune produs în r' :

$$K_{\mathrm{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\int\int f(E')\,\nu(E)\,\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\,K_{\mathrm{SI}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\,E, E')\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}E', \qquad (2.434)$$

unde $f(E')$ este spectrul neutronilor.

În cazul reactorilor termici, ținînd însă seama și de efectul fisiunilor rapide, nucleul de mai sus are forma

$$K_{\mathrm{F.th}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nu_{\mathrm{th}}\,\Sigma_{f.\mathrm{th}}\int_{E'} f(E')\,K_{\mathrm{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E_{\mathrm{th}}, E')\mathrm{d}\,E'. \qquad (2.435)$$

În cazurile în care domeniul de dependență a nucleului de energie este îngust (cazul grupului rapid), aceste nuclee pot fi înlocuite cu funcții Dirac în E, ceea ce simplifică mult calculele.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de definiția generală (2.434) a nucleului de fisiune, ca și de cea a nucleului de absorbție definit ca numărul de neutroni produși în reactor pe neutron absorbit,

$$K_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\int\int f(E')\Sigma_a(E)\, K_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E, E')\, dE\, dE', \qquad (2.436)$$

observăm că raportul lor reprezintă $\int K_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}$, adică momentul de ordin zero al nucleului K_F, care în același timp este și factorul de multiplicare pentru un mediu infinit k_∞.

În mod analog, exprimînd numărul de neutroni de fisiune produși în r în unitatea de timp prin

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int S(\mathbf{r}')\, K_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \qquad (2.437)$$

și dezvoltînd în serie Taylor, se obține momentul de ordinul doi al nucleului de fisiune :

$$\frac{1}{6}\frac{\int r^2 K_F(r)\cdot 4\pi r^2\, dr}{\int K_F(r)\cdot 4\pi r^2\, dr}, \qquad (2.438)$$

care este chiar aria de migrație M^2, atît de importantă în calcule de criticitate. La reactorii de dimensiuni mici trebuie luate în considerare și momentele de ordin mai înalt ale nucleului K_F.

2.5.7. Nuclee sintetice

În introducere am accentuat că nucleele obținute în paragrafele precedente conțin toate impreciziile aproximațiilor prin care le-am dedus (aproximația difuziei, a încetinirii continue, a încetinirii pe grupe de energie etc.), păstrînd însă avantajele unei mari comodități în calcule, în special la geometrii complexe.

De aceea în cazurile cînd aproximațiile amintite nu mai sînt valabile, sau la geometrii complexe, se folosesc nuclee sintetice, obținute fie analitic, fie experimental. Acestea au avantajul că dau rezultate foarte apropiate de cele experimentale și pot fi determinate pentru orice tip de rețea în parte. Ele sînt fie nuclee elementare, fie combinații ale acestora, dar în expresiile lor se introduc parametri determinați experimental.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a fi însă siguri de valabilitatea metodei de deducere a nucleelor sintetice-analitice sau experimentale, ele trebuie să satisfacă o serie de condiții :

a) valoarea experimentală a lui $\frac{\overline{r^2}}{2}$ trebuie să coincidă cu cea analitică, obținută prin metoda momentelor din nucleul sintetic considerat ;

b) aria totală definită de curba analitică a distribuției neutronilor față de nucleul sintetic trebuie să fie egală cu aria totală definită de curba experimentală ;

c) în cazul absorbției cu încetinire, nucleul sintetic trebuie să îndeplinească condiția de normare amintită :

$$\int_S K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, E_{th})\mathrm{d}r' = p(E_{th}). \tag{2.439}$$

În cazul în care dependența nucleului sintetic atît de deplasarea $|r-r'|$, cît și de energie este pronunțată (de exemplu cînd există un procent apreciabil de fisiuni la energii epitermice), se preferă un nucleu sintetic analitic. Aceasta poate fi o sumă de nuclee analitice astfel alese încît fiecare să descrie cît mai corect un anumit domeniu.

Pentru moderatori grei se folosesc nuclee vîrstă sau multigrup, iar pentru moderatori ușori se folosesc nuclee date de metoda Goertzel-Selengut.

În cazul în care dependența nucleului de energie poate fi neglijată (de exemplu cînd fisiunile epitermice sînt neglijabile) sau în cazul soluțiilor diluate de U^{235} în H_2O etc.), se folosesc nuclee sintetice experimentale (vezi în paragraful precedent deducerea lui τ).

Cel mai simplu nucleu sintetic îl constituie suprapunerea (suma) mai multor nuclee de difuzie cu parametri determinați experimental.

În continuare vom da cîteva exemple de nuclee sintetice analitice și experimentale sub forma de transformate Fourier, care se aplică direct și la obținerea condiției de criticitate :

— nucleu monogrup (difuzie),

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + L^2B^2)};$$

nucleu bigrup (difuzie),

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + L^2B^2)(1 + L_1^2B^2)};$$

nucleu monogrup (vîrstă-difuzie),

$$\overline{K} = \frac{e^{-B^2\tau}}{(1 + L^2B^2)};$$

Scanned with OKEN Scanner

nucleu bigrup (vîrstă-difuzie),

$$\overline{K} = \frac{e^{-B^2\tau}}{(1 + L^2B^2)(1 + L_1^2B^2)}.$$

Pentru încetinirea și difuzia în apă (la care diferența dintre $\tau_{exp} = 30{,}4\ cm^2$ și $\tau_{calc} = 26\ cm^2$ nu a găsit încă o explicație corectă), se folosesc nucleele sintetice:

— nucleul gaussian (vîrstă),

$$\overline{K} = e^{-B^2\tau}; \qquad \tau = 30{,}4\ cm^2;$$

— nucleul Yakawa (difuzie),

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + L_1^2B^2)},$$

$$L_1^2 = 25{,}0\ cm^2$$

sau

$$L_1^2 = 30{,}4\ cm^2;$$

nucleu Greuling (sumă a trei nuclee de difuzie),

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + 20{,}2\ B^2)(1 + 4{,}2\ B^2)(1 + 0{,}6\ B^2)},$$

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + 20{,}2\,B^2)(1 + 4{,}2\,B^2)(1 + B^2)};$$

nucleul sintetic „bigrup",

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + 26{,}54\ B^2)(1 + 2{,}625\ B^2)},$$

$$\overline{K} = \frac{1}{(1 + 26{,}27\ B^2)(1 + 2{,}26\ B^2)}.$$

Alte nuclee folosite pentru apă, pe care le amintim doar, sînt:

a) nucleul „gazului hidrogen", în care mișcarea protonilor din apă este tratată ca cea dintr-un gaz liber fără legături între protoni sau între protoni și oxigen;

b) nucleul „gazului de masă 18", în care moleculele de apă sînt tratate drept corpuri solide și înlocuite printr-un gaz de particule punctiforme de masă 18;

c) nucleul Brown-St. John, în care moleculele de apă sînt tratate drept corpuri solide ce se pot roti. La rîndul lor, ele sînt înlocuite cu particule punctiforme care au o „masă rotațională" egală cu 1,88;

Scanned with OKEN Scanner

d) nucleul Nelkin, în care mișcarea protonilor din apă este descrisă de trei oscilatori armonici, din care doi de vibrație pentru nivelele de 0,205 și 0,48 eV și unul de torsiune pentru nivelul de 0,05 eV. Molecula de apă ca un tot este tratată prin modelul gazului de masă 18.

Pentru încetinirea și difuzia în apă grea se folosește

$$\frac{q(r)\,e^{\tau_1/\tau_2}}{8\pi r\,\tau_2}\left\{\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau_1}}-\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)\right]e^{-r/\sqrt{\tau_2}}-\right.$$
$$\left.-\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau_1}}+\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right)\right]e^{r/\sqrt{\tau_2}}\right\}. \tag{2.440}$$

Aici procesul este descris prin două etape: un proces de încetinire de la energia de fisiune pînă la rezonanța indiului și un proces de difuzie cu energie constantă care are loc cu $L=\sqrt{\tau_2}$. Aici se folosesc valorile $\tau_1=58$ și $\tau_2=48$ cm², iar

$$\operatorname{erf}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

care conduc la o vîrstă a neutronilor în apă grea, de la apariția în fisiune pînă la absorbția la rezonanța indiului, de 106 cm².

O îmbunătățire a teoriei vîrstei se mai obține dacă se ține seama de faptul că drumul liber mijlociu total al neutronilor în mediu $\lambda_{tot}(v)$ este maxim pentru $v=v_0$, deci pentru neutronii cu viteză maximă, adică cei emiși de sursă și care nu au suferit încă nici o ciocnire. Această componentă „primară" a neutronilor emiși de sursă este deci și cea mai pătrunzătoare, iar în cazul sursei punctiforme în mediu infinit distribuția ei este dată de

$$\overline{K}=\frac{1}{\lambda_{tot}(E_0)}\,\frac{e^{-r/\lambda_{tot}(E_0)}}{4\pi r^2}, \tag{2.441}$$

unde E_0 corespunde lui v_0.

Tot îmbunătățire a teoriei vîrstei se consideră și luarea în considerare, pe lîngă componenta „primară" de mai sus, a componentei neutronilor care au suferit prima ciocnire (corecție de primă ciocnire). Această corecție ține seama mai bine de faptul că de fapt încetinirea neutronilor începe o dată cu prima ciocnire.

În acest caz avem

$$\overline{K}=\frac{1}{\lambda_S'(E_0)}\cdot\frac{e^{-r'/\lambda_S'(E_0)}}{4\pi r'^2}\cdot\frac{e^{-(r-r')^2/4\tau}}{(4\pi\tau_1)^{3/2}}, \tag{2.442}$$

unde $\lambda_S'(E_0)$ este drumul liber mijlociu pentru prima ciocnire, τ_1 vîrsta neutronilor pînă la energia medie după prima ciocnire cu ajutorul căruia

Scanned with OKEN Scanner

reprezentăm fluxul de neutroni $\Phi(r, \tau)$ și densitatea de încetinire $q(r, \tau)$ prin

$$\Phi(r, \tau) = \frac{\lambda_s(E)}{\xi} q(r, \tau), \tag{2.443}$$

$$q(x, \tau) = \frac{q_0}{4\pi\lambda_s'(E_0)r^2} x\, e^{-x^2} [F(a + x) - F(a - x)],$$

unde

$$x \equiv \frac{r}{2\sqrt{\tau_1}}; \qquad a \equiv \frac{\sqrt{\tau_1}}{\lambda_s'(E_0)};$$

$$F(z) = \int_0^z t^2 [1 - \operatorname{erf}(t)]\, dt.$$

O îmbunătățire substanțială a nucleului vîrstei Fermi o constituie nucleul sintetic de încetinire al lui Christy-Wheeler, care, pe lîngă corecția de primă ciocnire, mai introduce și corecția de ultimă ciocnire.

Acest nucleu este deci o suprapunere de trei nuclee, dintre care unul de încetinire și două de transport (cele de primă și de ultimă ciocnire).

Corecția de ultimă ciocnire se introduce pentru a ține seama că în definiția clasică a încetinirii se consideră neutronii care ajung la energia E (de exemplu E_{th}), în timp ce în realitate trebuie luați în considerare neutronii care traversează energia E, iar acest lucru se obține prin luarea în considerare a ultimei ciocniri.

Nucleul de primă ciocnire pentru o sursă-unitate izotropă punctiformă de neutroni rapizi de energie E_0 (în mediu infinit) este dat de:

$$K_{SI,0}(|\mathbf{r}, \mathbf{r}'|, E_0) = \frac{1}{\lambda_s(E_0)} \frac{e^{-r'/\lambda_s(E_0)}}{4\pi r'^2}. \tag{2.444}$$

Acești neutroni din r' (care au suferit o primă ciocnire) constituie sursa propriu-zisă de încetinire. Pentru sursa-unitate din r', nucleul de încetinire este dat de

$$K_{SI,1}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|, E) = \frac{p(E)\, e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|^2/4\tau(E)}}{[4\pi\tau(E)]^{3/2}}. \tag{2.445}$$

Acești neutroni din r_1 constituie, la rîndul lor, sursa pentru ultima ciocnire din r, pentru care scriem nucleul de ultimă ciocnire

$$K_{SI,2} = (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, E) = \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/\lambda_s(E)}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2}. \tag{2.446}$$

Final se obține nucleul sintetic total

$$K_{SI} = K_{SI,0} \cdot K_{SI,1} \cdot K_{SI,2}, \tag{2.447}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar fluxul de neutroni și densitatea de încetinire se exprimă prin relațiile (pentru comoditate folosim letargia u în locul energiei E)

$$\Phi(r, u) = \frac{p(u)}{\xi} \int_{v_1=\infty} K_{S1,2}\, dV_1 \int_{v'_1=\infty} K_{S1,1} K_{S1,0} \frac{du}{\xi} dV' \qquad (2.448)$$

sau

$$\Phi(\mathbf{r}, u) = \frac{q_0}{\xi} \int \frac{dr'}{\lambda_s(0)} \int dr \left[\frac{e^{-|\mathbf{r}'|/\lambda s(0)}}{4\pi r'^2} \frac{e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|/\lambda s(u)}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \right], \qquad (2.449)$$

iar densitatea de încetinire este dată de

$$q(r, u) = \frac{\xi}{\lambda_s(u)} \Phi(\mathbf{r}, u). \qquad (2.450)$$

Nucleul Christy-Wheeler se aproximează uneori cu un nucleu gaussian (vîrstă) de forma

$$K_{S1} = \frac{e^{-r^2/4\tau'}}{(4\pi\tau')^{3/2}}, \qquad (2.451)$$

cu $\tau' =$ „vîrsta corectată". Această vîrstă corectată se obține din distanța pătratică medie $\bar{r}^2$, calculată cu distribuția de încetinire $q(r, u)$ Christy-Wheeler drept funcție de ponderare. Folosind forma de momente a transformatei Fourier a nucleului Christy-Wheeler, se obține

$$\bar{r}^2 + \bar{r}_0^2 + \bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 = 2\bar{d}_S^2(0) + 6\tau + q\lambda_S^2(u), \qquad (2.452)$$

$$\tau^1 = \frac{1}{6}\bar{r}^2 = \left[\tau + \frac{\lambda_s^2(0) + \lambda_s^2(u)}{3}\right]. \qquad (2.453)$$

În tabela 2.4 sînt comparate valorile lui τ pentru neutronii de fisiune calculate cu nucleul vîrstei Fermi, cu nucleul lui Christy-Wheeler și determinat experimental.

TABELA 2.4

„Vîrsta neutronilor" [A–1]

Moderator	(Fermi) (cm²)	(Christy — Wheeler) (cm²)	experimental (cm²)
Beriliu	79,7	84,0	97,2
Grafit	352	364	364

Se vede deci că teoria vîrstei se poate aproxima pînă la orice grad de precizie dacă se ia un număr suficient de grupe de energie (sau chiar ciocniri individuale care prezintă importanță). Pentru încetinirea în apă este suficient un grup termic și 1—2 grupe rapide cu nucleele corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

La moderatori grei, la care aproximația vîrstei (nucleu gaussian) era suficientă în cazul surselor monoenergetice, sînt necesare chiar pînă la șase grupe (deci șase nuclee suprapuse) pentru a reprezenta corect realitatea în cazul surselor cu o largă distribuție energetică (cum ar fi sursele de fisiune).

De exemplu, la grafit (în cazul sursei de fisiune), aproximația trigrup de încetinire este mai puțin bună decît cea gaussiană (deci trebuie luate >3 grupe), în timp ce în cazul apei chiar un singur grup dă rezultate mai bune decît un nucleu gaussian.

În cazul cel mai general al încetinirii multigrup, vom reprezenta nucleul sintetic de încetinire printr-un nucleu de difuzie, deoarece în fiecare grup nu mai avem încetinire, ci numai difuzie.

Avantajul acestei metode este că permite folosirea oricărui număr de nuclee (deci de grupe) cu parametri potriviți (analitici sau experimentali) pentru a concorda cît mai bine cu curbele experimentale. De asemenea pentru fiecare grup nucleul poate fi identic (ca model folosit) sau diferit. Rezultă că, deși nucleul sintetic multigrup apare ca un artificiu de calcul, el are o bază reală deoarece procesul de încetinire nu mai este presupus continuu (ca în teoria vîrstei) ci discret, pe grupe de energie. Acest formalism ne permite să trecem de la ecuația cu derivate parțiale a teoriei vîrstei la ecuațiile diferențiale ordinare cuplate ale teoriei grupurilor de neutroni. Deci metoda nucleelor integrale fundamentează cunoscuta înlocuire a încetinirii continue prin încetinirea pe grupe, necesară în calcule la reactorii reflectați, cu neuniformități spațiale, cu moderatori ușori sau distribuții energetice complexe.

O altă mărime importantă în calcule de fizică a reactorului este probabilitatea P_f de evitare a scăpărilor de neutroni din reactor sau dintr-un anumit interval de energie în timpul încetinirii lor.

Conform celei de-a doua teoreme fundamentale a teoriei reactorului, această probabilitate P_f este dată chiar de transformata Fourier a nucleului de încetinire. Vom da expresiile acestor probabilități în cazurile cele mai frecvente și legătura lor cu condițiile de criticitate.

În aproximația vîrstei (nucleul gaussian):

$$P_f = \overline{K}_{SI}(B^2) = \int_0^\infty \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}}\, 4\pi r^2\, \frac{\sin Br}{Br}\, dr = \begin{cases} e^{-B^2\tau} \text{ pentru reactorii mici,} \\ 1 - B^2\tau \text{ pentru reactorii mari;} \end{cases} \tag{2.454}$$

$$\frac{k\overline{K}_{SI}(B^2)}{(1+L^2B^2)} = 1 = \begin{cases} \dfrac{k\alpha e^{-B^2\tau}}{1+L^2B^2} \text{ pentru reactorii mici,} \\ \dfrac{k(1-B^2\tau)}{(1+L^2B^2)} \text{ pentru reactorii mari.} \end{cases} \tag{2.455}$$

La reactorii mici o aproximație mai bună a lui P_f este

$$P_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tau n + 1)!} B^{2n} \overline{r^{2n}}. \tag{2.456}$$

În aproximația difuziei (nucleul Yukawa):

$$P_f = \overline{K}_{sl}(B^2) = \int_0^{\infty} 4\pi r \frac{k^2}{4\pi r} e^{-kr} \frac{\sin Br}{Br} dr = \frac{k^2}{k^2 + B^2}; \tag{2.457}$$

dacă $k^2 = \frac{1}{\tau}$, avem $P_f = \frac{1}{(1 + \tau B^2)}$;

dacă $k^2 = \frac{1}{L_{th}^2} = \frac{\Sigma_a}{D}$ avem $P_f = \frac{1}{(1 + L^2 B^2)}$,

iar condiția de criticitate devine:

$$\frac{k\overline{K}_D(B^2)}{(1 + L^2B^2)} = \frac{k}{(1 + \tau B^2)(1 + L^2B^2)} = 1. \tag{2.458}$$

În aproximația asimptotică:

$$P_f = \overline{K}(B^2) = \frac{\alpha k^2}{u^2 + B^2} + \frac{\Sigma_a}{B} \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{\Sigma'}, \tag{2.459}$$

unde

$$\Sigma' = \frac{5}{4}\Sigma; \quad \alpha = 1 - \frac{\Sigma_a}{\Sigma}; \quad k^2 = \frac{1}{L^2},$$

care s-a obținut prin combinarea unui nucleu de difuzie și a unuia de primă ciocnire. Condiția de criticitate devine

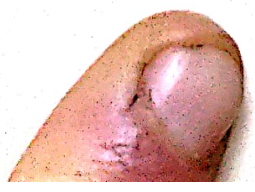
$$\frac{k\overline{K}_{Tr}(B^2)}{(1 + L^2B^2)} = 1 = \frac{k\left[\frac{\alpha k^2}{k^2 + B^2} + \frac{\Sigma_a}{B} \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{\Sigma'}\right]}{(1 + L^2B^2)}. \tag{2.460}$$

În aproximația de primă ciocnire:

$$P_f = \overline{K}_{sl}(B^2) = \frac{\Sigma_a}{B} \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{\Sigma_a} = \frac{1}{(3\tau B^2)^{1/2}} \operatorname{tg}^{-1}(3\tau B^2)^{1/2}, \tag{2.461}$$

care se dezvoltă în serie

$$P_f \simeq \left[1 - B^2\tau + \frac{9}{5}(B^2\tau)^2 \ldots\right].$$



Scanned with OKEN Scanner

Acești primi trei termeni dau o valoare mai mare decît primii trei termeni ai dezvoltării transformatei Fourier a nucleului vîrstei ($e^{-B^2\tau}$). Rezultă deci (analitic) că un reactor moderat cu H_2O (la care se aplică nucleul de primă ciocnire) devine mai repede critic decît, de exemplu, un reactor cu grafit, chiar dacă au aceleași τ, k și $P_{th} \ll P_f$.

Condiția de criticitate în acest caz devine

$$\frac{k\overline{K}(B^2)}{(1+L^2B^2)} = 1 = \frac{(\nu\Sigma_f + \Sigma_c)}{B} \operatorname{tg}^{-1}\frac{B}{\Sigma}. \tag{2.462}$$

Nucleele de încetinire pentru medii cu împrăștiere elastică izotropă mai pot fi date și sub formele din tabela 2.3, în funcție de E sau de $u = \ln\left(\frac{\text{const.}}{E}\right)$.

În cazul împrăștierii inelastice și al amestecurilor de elemente cu mase diferite, se folosesc fie nuclee separate (vezi tabela 2.5), ca în metoda lui Goertzel (elementul ușor — hidrogenul — prin nucleul exact, iar cel greu printr-un nucleu gaussian), sau un nou nucleu, definit printr-o suprapunere de nuclee funcții delta:

$$K_{sc}(E, E') = \sum_i a_i \delta[E - (E' - E_i)], \tag{2.463}$$

în care se presupune deci că împrăștierea are ca rezultat salturi discrete de energie E_i cu probabilitatea a_i.

2.5.8. Nuclee integrale în aproximațiile P_k și $P_L^{\pm}$

Nucleele integrale din paragrafele precedente au fost obținute în aproximațiile de difuzie, de transport (aproximația asimptotică), de încetinire continuă sau pe grupe, la care s-au introdus diverse corecții în cazul nucleelor sintetice analitice. Dar aceste nuclee pot fi deduse principial în oricare altă aproximație în care soluția ecuației lui Boltzmann pentru transportul neutronilor poate fi pusă sub formă integrală.

Una din aceste forme este

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} E_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\,[p(\mathbf{r}')\,\Phi_0(\mathbf{r}') + S(\mathbf{r}')]\,d\mathbf{r}', \tag{2.464}$$

în care $\frac{1}{2} E_1(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ este nucleul exact de transport (sau de o singură ciocnire). În aproximațiile P_{2L+1} sau $P_L^{\pm}$, acest nucleu exact de transport se înlocuiește printr-o sumă de exponențiale

$$K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_{i=1}^{i+1} a_i\, e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\mu_i}, \tag{2.465}$$

Scanned with OKEN Scanner

TABELA 2.5

Nuclee de împrăştiere [R–1]

Cazul	$K(E, E')$	$K(u, u')$	$\int_0^E K(E'', E')\,dE'' = G(E, E')$	$\int_0^u K(u, u')\,du' = G(u, u')$
Hidrogen A = 1	$1/E'$ $E \leqslant E'$ 0 $E > E'$	$e^{-(u-u')}$ $u \geqslant u'$	E/E' $E \leqslant E'$ 1 $E \geqslant E'$	$e^{-(u-u')}$ $u \geqslant u'$ 1 $u \leqslant u'$
Un singur element (de masă arbitrară)	$1/(1-\alpha)E'$ $\alpha E' \leqslant E \leqslant E'$ 0 $\alpha E' > E > E'$	$\frac{e^{-(u-u')}}{(1-\alpha)}$ $u' \leqslant u \leqslant u' + \ln\frac{1}{\alpha}$ 0 $u' \geqslant u \geqslant u' + \ln\frac{1}{\alpha}$	$\frac{(E-\alpha E')}{(1-\alpha)E'}$ $\alpha E' \leqslant E < E'$ 0 $E \leqslant \alpha E'$ 1 $E \geqslant E'$	$\frac{e^{-(u-u')}-\alpha}{(1-\alpha)}$ $u' \leqslant u \leqslant u' + \ln\frac{1}{\alpha}$ 0 $u \geqslant u' + \ln\frac{1}{\alpha}$ 1 $u \leqslant u'$
Amestec de elemente de mase arbitrare		$\frac{1}{\sigma_s}\sum_i \sigma_s^i K^i$ K^i şi G^i	sînt nucleele pentru	$\frac{1}{\sigma_s}\sum_i \sigma_s^i G^i$ un singur element
Fermi	–	$\xi\delta(u-u') + \delta(u-u')$	–	$\xi\delta(u-u')$
Wigner	–	$\frac{1}{\xi} e^{-(u-u')/\xi}$ $u \geqslant u'$ 0 $u < u'$	–	$e^{-(u-u')/\xi}$ $u \geqslant u'$ 1 $u \leqslant u'$
Greuling-Goertzel *	–	$\frac{1}{\varepsilon^x \xi} e^{-(u-u')/\varepsilon\xi} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\delta(u-u')$ pt $u \geqslant u'$ 0 pt $(u < u')$	–	$\frac{1}{\varepsilon} e^{-(u-u')/\varepsilon\xi}$ $u \geqslant u'$ 1 $u \leqslant u'$

* Se vede că nucleul Greuling-Goertzel tinde spre nucleul Fermi (gaussian sau vîrsta) cînd $\varepsilon \to 0$ şi spre nucleul Wigner cînd $\varepsilon \to 1$.

Scanned with OKEN Scanner

unde μ_i sînt rădăcinile pozitive ale ecuațiilor,

$$P_{2L+1}(\mu_i) = 0 \text{ în aproximația } P_{2L+1},$$

$$P_{L+1}(2\mu_i - 1) = 0 \text{ în aproximația } P_L^{\pm}, \tag{2.465'}$$

iar coeficienții a_i sînt dați de expresia

$$p \sum_{k'} a_{k'} \frac{2\mu_{k'}^{-1}}{\mu_{k'}^{-2} - \nu_k^2(p)} = 1,$$

unde $a_k \neq f(p)$, deci a_k se evaluează la $p \to 0$ cînd $k = k'$ devine dominant și deci

$$a_k = \frac{1}{2\mu_k} \frac{\sum_n B_n \mu_k^{2n}}{\sum_n A_n \mu_k^{-2n}}.$$

În deducerea lui a_k s-a considerat că ecuația echivalentă ecuației integrale cu nucleul aproximat P_{2L+1} este

$$\sum_{n=0}^{L+1} (A_n - pB_n) \Delta^{2n} \Phi = 0, \tag{2.466}$$

ale cărei funcții proprii sînt de forma $e^{\pm \nu_k(p)x}$, cu condiția

$$\sum_n A_n \nu_k^{2n}(p) = p \sum_n B_n \nu_k^{2n}(p). \tag{2.467}$$

Aceste funcții proprii trebuie să fie funcții proprii și ale ecuației integrale echivalente, ceea ce conduce la condiția care ne-a furnizat expresiile lui a_k.

Nucleul exact de transport E_1 are o singularitate logaritmică în origine, în timp ce nucleul în aproximația P_L sau $P_L^{\pm}$ nu are. De asemenea, la x mare, $E_1(x) \simeq \frac{e^{-x}}{x}$ și, cum $\mu_i < 1$ pentru toate deplasările foarte mici sau foarte mari, neutronii care suferă deplasări medii vor fi supraestimați de către nucleul aproximat.

În concluzie, nucleul exact de încetinire poate fi înlocuit în aproximațiile P_L sau $P_L^{\pm}$ prin suma de exponențiale ale căror „lungimi de atenuare" vor fi chiar soluțiile ecuațiilor în aproximațiile respective (la noi ecuațiile 2.465').

Scanned with OKEN Scanner

2.5.9. Nuclee integrale în cinetica reactorilor

Ecuația de transport dependentă de timp în cazul capturii slabe este

$$\frac{1}{\Sigma_s(n)}\,\mu\,\frac{\partial\psi(z,\,u,\,\mu)}{\partial z}+\frac{1}{\Sigma(u)}\,\frac{\partial\psi(z,\,u,\,\mu)}{v\partial t}+[1-c(u)]\,\psi(z,\,u,\,\mu)= \tag{2.468}$$

$$=\int_0^u du'\int d\Omega'\,\psi(z,\,u',\,\mu')\,f(\mu_0,\,u-u')+S(z,\,u).$$

Presupunînd că distribuția unghiulară a neutronilor este izotropă, putem reține doar primii doi termeni ai polinoamelor Legendre în dezvoltarea în armonici sferice, obținînd două ecuații:

$$\frac{1}{\Sigma(u)v}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\Sigma(u)\partial z}+[1-c(u)]\psi_0=-\xi\,\frac{\partial\varphi_0}{\partial u}\,\delta(z)\,\delta(u)\,\delta(t), \tag{2.469}$$

$$\psi_1=\frac{1}{3\Sigma(u)\,(1-\bar{\mu})}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial z}\right)=-\frac{\lambda_{tr}}{3}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial z};\qquad \lambda_{tr}=[\Sigma(u)\,(1-\mu_0)]^{-1}$$

Cele două ecuații se reduc la una singură de gradul doi în z dacă introducem vîrsta τ și $q'=\xi\,\Phi_0(z,\,\tau,\,t)$:

$$\frac{\partial q'}{\partial\tau}+\frac{3}{\lambda_{tr}}\,\frac{\partial q'}{\partial t}+\frac{3[1-c(u)]\,\Sigma(u)}{\lambda_{tr}}=\frac{\partial^2 q'}{\partial z^2}+\delta(z)\,\delta(\tau)\,\delta(t). \tag{2.470}$$

Soluția este dată de R. E. Marshak sub forma nucleelor integrale (pentru sursă plană în mediu infinit):

$$q'(z,\,\tau,\,t)=q(z,\,\tau)\,p(c)\,T(t),$$

$$q'(z,\,t)=\frac{e^{-z^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{1/2}}, \tag{2.471}$$

$$p(c)=\exp\left\{-\int_0^u\left[1-c(u)\,\frac{du'}{\xi}\right]\right\},$$

$$T(t)=\delta\left[t-\int_0^u\frac{du'}{v\,\Sigma(u')\,\xi}\right].$$

Se vede că p este de fapt probabilitatea evitării capturii la rezonanță iar integrala din T reprezintă timpul de încetinire.

Scanned with OKEN Scanner

O interpretare mai intuitivă din punct de vedere fizic obținem pentru nucleul temporal de difuzie. Dacă scriem ecuația de difuzie dependentă de timp sub forma

$$D\Delta\,\Phi(\mathbf{r},\,t) - \Sigma_a\,\Phi(\mathbf{r},\,t) + S(\mathbf{r},\,t) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\,\Phi(\mathbf{r},\,t)}{\partial t}, \qquad (2.472)$$

vom putea găsi o soluție fie printr-o transformată Fourier a variabilei spațiale, fie printr-o transformată Fourier (pentru stări staționare), sau una Laplace (pentru stări tranzitorii) a variabilei temporale. Ea va avea forma

$$\Phi(\mathbf{r},\,t) = \frac{1}{\Sigma_a}\int \mathrm{d}r'\mathrm{d}t' k^2 D\,\frac{\mathrm{e}^{\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4D(t-t')} + k^2D(t-t')\right]}}{[4\pi D(t-t')]^{3/2}}\,S(\mathbf{r}',\,t'), \qquad (2.473)$$

unde paranteza mare este nucleul temporal de difuzie pentru sursa punctiformă.

În cazul difuziei neutronilor în mediu infinit cu secțiune de absorbție în $1/v$ și sursa punctiformă monoenergetică, soluția ia forma mai simplă

$$\Phi(\mathbf{r},\,t) = \frac{\Phi_0}{[4\pi\tau(t)]^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-r^2/4\tau(t)}\,\mathrm{e}^{-t/T}. \qquad (2.474)$$

Nucleul temporal de difuzie din această expresie reprezintă deci probabilitatea ca în punctul r și la momentul t să existe $\Phi(r,\,t)$ neutroni dacă în punctul r' și la momentul t' există o sursă punctiformă de neutroni de intensitate Φ_0.

Alte nuclee temporale pentru surse de diferite geometrii sînt date în tabela 2.6.

Din forma nucleului din (2.474) se deduce timpul necesar pentru ca intensitatea neutronilor să ajungă maximă într-un punct x și care este numit „timp de difuzie" :

$$t_{\mathrm{dif}} = [(4k^2x^2 + 1)^{1/2} - 1]/4k^2Dv\,;\quad k^2 = \frac{1}{D_0\,T}, \qquad (2.475)$$

care în absența absorbției se reduce la

$$t_{\mathrm{dif}} = \frac{x^2}{2Dv}. \qquad (2.476)$$

Ecuația de mai sus este liniară în $\frac{\partial}{\partial t}$, deoarece s-a presupus că neutronii sursei se propagă instantaneu în mediu la orice distanță de sursă.

În realitate, neutronii necesită un timp $t_{\mathrm{ret}} = \frac{x}{v}$, numit „timp de întîrziere", pentru a ajunge la o distanță x.

Scanned with OKEN Scanner

TABELA 2.6

Nuclee dependente de timp [R–1]

Geometria sursei	Notaţia	Normalizarea	Nucleul
Punct	$K^t_{p.D}(\lvert r - r' \rvert, (t - t'))$	$\int_0^\infty 4\,\pi r^2 K^t_{p.D}\,(r, t)\,dr = 1$	$\dfrac{\exp.\left[-\dfrac{[r - r']^2}{2Dv(t - t')} - k^2\,Dv\,(t - t')\right]}{[4\pi\,Dv\,(t - t')]^{3}/_{2}}$
Plan	$K^t_{pl.D}(\lvert z - z' \rvert, (t - t'))$	$\int_0^\infty K^t_{pl.D}(\lvert z \rvert, t)\,dz = 1$	$\dfrac{\exp\left[-\dfrac{\lvert z - z' \rvert^2}{4\,Dv\,(t - t')} - k^2\,Dv\,(t - t')\right]}{[4\,\pi\,Dv\,(t - t')]^{1}/_{2}}$
Linie	$K^t_{l.D}\,(s, (t - t'))$	$\int_0^\infty 2\pi\,s\,K^t_{l.D}(s, t)\,ds = 1$	$\dfrac{\exp\left[-\dfrac{s^2}{4\,Dv\,(t - t')} - k^2\,Dv\,(t - t')\right]}{4\pi\,Dv\,(t - t')}$
Pătură cilindrică	$K^t_{c.D}\,(r, r', (t - t'))$	$\int_0^\infty 2\,\pi\,r\,K^t_{s.D}\,(r, r', t)\,dr' = 1$	$\dfrac{\exp\left[-\dfrac{r^2 - r'^2}{4\,Dv(t - t')} - k^2\,Dv\,(t - t')\right]}{4\,Dv\,(t - t')}\,I_0\left(\dfrac{rr'}{2\,Dv(t - t')}\right)$
Pătură sferică	$K^t_{s.D}\,(r, r', (t - t'))$	$\int_0^\infty 4\pi r^2 K^t_{s.D}\,(r, r', t)\,dr = 1$	$\dfrac{e^{-K^2 Dv(t - t')}}{4\pi\,rr'}\left\{\dfrac{\exp\left[-\dfrac{\lvert r - r''^2 \rvert}{4\,Dv(t - t')}\right]}{[4\pi\,Dv\,(t - t')]^{1}/_{2}} - \dfrac{\exp\left[\dfrac{(r + r')^2}{4\,Dv(t - t')}\right]}{[4\pi Dv(t - t')]^{1}/_{2}}\right\}$

Scanned with OKEN Scanner

Acest „timp de întîrziere", comparat cu t_{dif}

$$\frac{t_{dif}}{t_{ret}} = \frac{x}{2D} = \frac{3}{2}\frac{x}{\lambda_{tr}}, \tag{2.477}$$

arată că doar la distanțe $x \gg \lambda_{tr}$ de sursă poate fi neglijat t_{ret} față de t_{dif}. Deci, în experiențele efectuate departe de surse, aproximația în $\frac{\partial}{\partial t}$ a ecuației cinetice de difuzie este corectă. În caz contrar, în apropierea surselor și cînd este necesar să se țină seama de efectele de întîrziere, atît ecuația cinetică de difuzie, cît și legea lui Fick devin mai complicate.

Prima conține un termen în $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, devenind deci o ecuație a „telegrafistului" de forma

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r},\,t) - \Sigma_a\,\Sigma_t\,\Phi(\mathbf{r},\,t) + \Sigma_t\,S(\mathbf{r},\,t) = \\ = \frac{1}{v}\,\frac{\partial^2\,\Phi(\mathbf{r},t)\,\partial}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}\right)\frac{1}{v}\,\frac{\partial\,\Phi'(\mathbf{r},\,t)}{\partial t}, \tag{2.478}$$

care de altfel se reduce la ecuația de difuzie dependentă de timp dacă $\lambda_{tot} \to, 0, \Sigma_a \to 0, v \to \infty$ și în care condiții perturbația sursei s-ar propaga instantaneu. Aceste condiții sînt bine îndeplinite în cazul difuziei moleculare sau a căldurii, la care drumul liber mijlociu este mic, dar în cazul neutronilor acest drum este mai mare și deci efectele de întîrziere trebuie fuate în considerare.

Legea lui Fick ia forma generalizată

$$J(z) = -\,\lambda_{tr}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,[\overline{\mu^2}F_0(z)]\,; \quad \overline{\mu^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{F_2(z)}{F_0(z)}, \tag{2.479}$$

în care $J(z)$ nu mai este proporțional cu gradientul fluxului, ci cu o combinație liniară a variației în timp a curentului și a gradientului fluxului.

Soluția ecuației (2.478) are o componentă care corespunde unei propagări ondulatorii (un front de undă) și o componentă de perturbație datorită termenului liniar în $\frac{\partial}{\partial t}$.

Dacă și sursa ar avea un caracter periodic de forma

$$S(z,\,t) = \delta(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

soluția densității neutronilor, obținută prin transformata Fourier, ar avea forma unei oscilații amortizate:

$$\Phi(z,\,t) = \frac{1}{2D(h^2 + i\omega/D)^{1/2}}\exp\left\{-z\left(\frac{\rho^2 + k^2}{2}\right)^{1/2} + \mathrm{i}\left[\omega t - \left(\frac{\rho^2 - k^2}{2}\right)^{1/2}\right]\right\}, \tag{2.480}$$

unde

$$\rho^2 = \left[k^4 + \left(\frac{\omega}{D}\right)^2\right]^{1/2},$$

din care rezultă că viteza de propagare depinde de frecvență,

$$v_\omega = \omega[2/(\rho^2 - k^2)]^{1/2}, \tag{2.481}$$

și de lungimea de undă,

$$l_\omega = \frac{2\pi v_\omega}{\omega} = 2\pi[2/(\rho^2 - k^2)]^{1/2}, \tag{2.482}$$

iar distanța de atenuare de e ori (lungimea de relaxare) este dată de

$$\alpha = [2/(\rho^2 + k^2)]^{1/2}. \tag{2.483}$$

Un alt rezultat deosebit de valoros este acela că soluția problemei dependente de timp este dată de transformata Laplace a problemei independente de timp, în care însă secțiunea de absorbție este mărită cu cantitatea x/v.

De asemenea se poate obține atenuarea în timp și în energie a unui puls de neutroni monoenergetici într-un mediu greu infinit din nucleul integral al unei ecuații de tip Fokker-Planck care descrie, într-o formă puțin diferită, dispersia energiei pulsului. Ecuația de tip Fokker-Planck, caracteristică proceselor stohastice, apare aici, deoarece se consideră că împrăștierea neutronilor are caracterul unui proces Markov, adică probabilitatea de tranziție (în urma împrăștierii) în unitatea de timp depinde numai de starea inițială și finală a saltului de energie, fiind independentă de tot restul istoriei neutronilor. Deși reducerea ecuației integro-diferențiale Boltzmann la o ecuație de tip Fokker-Planck în cazul dependenței temporale este analogă cu metoda clasică de rezolvare prin dezvoltarea soluției în momentele energiei, totuși includerea problemei termalizării neutronilor într-un mediu greu în problema mai generală a proceselor de relaxare guvernate de o ecuație Fokker-Planck este făcută pentru prima oară în lucrarea [G-3].

Această ecuație este

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \Sigma_{av} K = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)M(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{M(x)}\right)\right], \tag{2.484}$$

unde $M(x)$ este distribuția Maxwelliană, iar K nucleul integral de atenuare în t și E.

În funcție de modelul fizic adoptat care se reflectă în expresia lui $f(x)$, se obține ecuația lui Wilkins sau ecuația lui Horowitz, binecunoscute în problemele de termalizare a neutronilor și exprimate aici prin intermediul nucleelor integrale.

Scanned with OKEN Scanner

În această formă, ultima ecuație descrie „modelul gazului greu generalizat".

Nucleul integral din (2.484) are forma

$$K(x, x', t) = \left[\frac{e^{(\alpha-2\beta)t}}{\pi x'(1-e^{-\alpha t})}\right]^{1/2} \sin h\left[\frac{2\sqrt{xx'\,e^{-\alpha t}}}{(1-e^{-\alpha t})}\right] \exp\left[-\frac{x+x'\,e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha t}}\right]. \tag{2.485}$$

Din considerentele succinte de mai sus rezultă că metoda nucleelor integrale permite o tratare comodă și a problemelor de cinetică a reactorului.

Același formalism al nucleelor integrale permite și studiul altor variații ale mărimilor caracteristice ale reactorului diferite de cele temporale, cum ar fi reactivitatea sau factorul de multiplicare. Astfel, expresia care reprezintă factorul de multiplicare efectiv în funcție de transformatele Fourier ale nucleelor de încetinire ale neutronilor prompți (indice p) și întîrziați (indice d) este

$$k_{ef} = (1-\beta)\, k_\infty\, \overline{K}^{p}_{s_1}(B^2) + \beta k_\infty\, \overline{K}^{d}_{s_1}(B^2), \tag{2.486}$$

unde β este fracțiunea totală de neutroni întîrziați.

Sensul fizic al acestei expresii devine mai clar dacă ne reamintim că transformatele Fourier pe care le cuprinde sînt probabilitățile neutronilor prompți și întîrziați de a nu scăpa din zona activă în timpul încetinirii.

Factorul de multiplicare efectiv mai este exprimat și în funcție de constanta de timp („perioada") T a reactorului prin relația (*inhour*, sau a „orei inverse")

$$k_{ef} = 1 + \frac{l}{T} + k_\infty\, \overline{K}^{d}_{s_1}(B^2) \sum_i \frac{\beta_i}{1+\gamma_i T}, \tag{2.487}$$

cu notațiile obișnuite.

Se mai definește și β_{ef} (fracțiunea efectivă de neutroni întîrziați):

$$\beta_{ef} \equiv \beta\, \frac{\overline{K}^{d}_{s_1}(B^2)}{\overline{K}^{p}_{s_1}(B^2)}. \tag{2.488}$$

O variație a reactivității cu dimensiunile reactorului, de exemplu, va fi dată de o expresie de forma

$$\Delta k = k_{ef} - 1 = (1-\beta)\, k\, \frac{\partial \overline{K}^{p}_{s_1}(B^2)}{\partial B}\, \Delta B + \beta k_0\, \frac{\partial \overline{K}^{d}_{s_1}(B^2)}{\partial B}\, \Delta B. \tag{2.489}$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind pentru $\overline{K}^p_{S1}(B^2)$ și $\overline{K}^d_{S1}(B^2)$ expresii multigrup de forma

$$\overline{K}^p_{S1}(B^2) = \frac{1}{(1 + L^2_{1p}B^2)(1 + L^2_{2p}B^2)(1 + L^2_3B^2)},$$

$$\overline{K}^d_{S1}(B^2) = \frac{1}{(1 + L^2_{12}B^2)(1 + L^2_3B^2)},$$

obținem

$$\frac{\partial \overline{K}^p_{S1}(B^2)}{\partial B} = -2B\overline{K}^p_{S1}(B^2) \sum_j \frac{L^2_{jp}}{(1 + L^2_{jp}B^2)},$$

$$\frac{\partial \overline{K}^d_{S1}(B^2)}{\partial B} = -2B\overline{K}^d_{S1}(B^2) \sum_j \frac{L^2_{ja}}{(1 + L^2_{ja}B^2)}. \tag{2.490}$$

Dacă într-un caz particular considerăm că variația de reactivitate a fost provocată de o variație Δh a înălțimii, care duce la o variație ΔB de *buckling* de forma

$$\Delta B = -\frac{B_h \Delta h}{h + 2d} \tag{2.491}$$

în metoda marginii extrapolate (d) sau

$$\Delta B = -\frac{B_h \Delta h}{h + \dfrac{2d}{(1 + B_h d)^2}}, \tag{2.492}$$

obținem pentru variația de reactivitate expresia

$$\frac{1}{\Delta h}\sum_i \frac{\beta_i}{(1 + \lambda_i T)} = \left[(1 - \beta)\frac{\overline{K}^p_{S1}(B^2)}{\overline{K}^d_{S1}(B^2)} \sum_j \frac{L^2_{jp}}{(1 + L^2_{jp}B^2)} + \right.$$

$$\left. + \beta \sum_j \frac{L^2_{ja}}{(1 + L^2_{ja}B^2)}\right] \frac{2B^2_h}{h + \dfrac{2d}{f}}, \tag{2.493}$$

unde

$$f = 1 \text{ în cazul (2.491)},$$

$$f = [1 + (B_h d)^2] \text{ în cazul (2.492)}. \tag{2.494}$$

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

2.1. Aproximația ecuației integrale

C—1 CASE K. M. et al., *Introd. to the theory of neutron diffusion*, LASL—1953.
C—2 CARLVIK I., AE—**227**, 1966.
D—1 DAVISON B., *Neutron transport theory*, Oxford, Clarendon Press, 1957.
D—2 DRĂGANU M., Compt. Rend. 228, 367 (1949).
D—3 DRĂGANU M., J. Math. Pure. Appl. **29**, 141 (1950).
P—1 PAPMEHL N., din *Developments in transport theory* (edit. Inönü E., Zweifel P. F.), London, Academic Press, 1967, p. 357.
R—1 ROȘESCU T., *Neutron transport theory*, IFA—FR—47; IFA—FR—51, 1966.
S—1 SNEDDON I. N., *Fourier transforms*, Londra, McGraw Hill Book Co. Inc., 1951.
T—1 TOIVANEN T., NSE, **16**, 176 (1963).
T—2 TAIT J. H., *An introduction to neutron transport theory*, Londra, Longmans, Green and Co. 1964.
V—1 VASILACHE S., *Probleme matematice în domeniul energiei nucleare*: Anal. Rom.-Sov., mat. fiz. (3), t. **10**, nr. *2* (17) pp. 29—54, 1956.

2.2. Aproximația funcțiilor proprii singulare

A—1 AAMODT R. F., NP—12458, 1962.
B—1 BEDNARZ R. et al., J. Math. Phys., *4*, 1285 (1963).
B—2 BALTZ R. V., din *Developments in transport theory* (edit. Inönü E., Zweifel P. F.), Londra, Academic Press, 1967, p. 301.
B—3 BOWDEN R. L. Jr. et al., TANS, **6**, 21 (1963).
B—4 BOWDEN R. L. Jr. et al., J. Math. Phys., **5**, 1527 (1964).
B—5 BOFFI V. C. et al., En. Nucle, **13**, 539 (1966).
B—6 BOWDEN R. L. Jr. et al., TANS, **9**, 113 (1966).
C—1 CASE K. M., Rev. Mod. Phys., **29**, 651 (1957).
C—2 CASE K. M., Ann. of Phys., **7**, 349 (1959).
C—3 CASE K. M., Ann. of Phys., **9**, 1 (1960).
C—4 CASE K. M., MMPS—NPC—1—1, 1961.
C—5 CLAESSON A., AE—164, 1964.
C—6 CORNGOLD N. et al., NSE, **15**, 13 (1963).
F—1 FERZIGER J. H. et al., Ann. of Phys., **22**, 192 (1963).
F—2 FERZIGER J. H. et al., NSE, **21**, 382 (1965).
F—3 FUCHS K. et al., Kernen, **7**, 386 (1964).
G—1 GALLONE S., Nu. Cim. (**10**), **31**, 203 (1964).
G—2 GILLEWICZ J., Nukla, **7**, 3 (1962).
G—3 GROSSMAN L. M. et al., En. Nucl., **11**, 593 (1964).
H—1 HEJTMANEK H., Atomkernen, **8**, 346 (1963).
H—2 HEJTMANEK H., PICG, P/401, 1964.
K—1 KOPPEL J. U., NSE, 16, 101, 1963; GA—34, 69, 1962.
K—2 KOPPEL J. U., GA—2988, 1962; BNL—719, vol. IV, 1232, 1962.
K—3 KIESEWETTER H., Kernen, **10**, 8 (1967).
K—4 Kuščer I. et al., Ann. of Phys. *30*, 411 (1964)); NSE, *23*, 402 (1965).
L—1 LAFORE P. et al., CEA—1072, 1958.
L—2 LEHNER J., J. Math. Mech., **11**, 173 (1962).
L—3 LEONARD A., Thesis, Stanford, Univ. California, 1963.
L—4 LEONARD A. et al., Ann. of Phys., **30**, 235 (1964).
L—5 LEONARD A. et al., J. Math. Phys., **5**, 399 (1964).
L—6 LEUTHAEUSER K. D., Atomkernen, **10**, 97 (1965).
M—1 MCCORMICK N. J. et al., NSE, 20, 462; TID—20540, 1964.
M—2 MENDELSON M. R. et al., J. Math. Phys., **5**, 668 (1964); TID—20503, 1962.

Scanned with OKEN Scanner

M—3 MUSKHELISHVILLI N. I., *Singular integral equations*, Noordhoff, Groningen, 1953.
M—4 MIKA J. R., NSE, **11**, 415 (1961).
M—5 MIKA J. R., NSE, **22**, 235 (1965).
M—6 MITSIS G. J., NSE, **17**, 55 (1963).
M—7 MITSIS G. J., NSE, **19**, 466 (1964).
M—8 MCCORMICK N. J. et al., J. Math. Phys., **6**, 1939 (1965), **7**, 2036 (1966).
N—1 NONNENMACHER TH. F., from *Developments in Transport Theory*'' (edit. Inönü E., Zweifel P. F.), Londra, Academic Press, 1967.
O—1 OHANIAN M. J., Thesis, Rensselaer Polyt. Inst., 1963.
P—1 PAPMEHL N. NSE, **22**, 451 (1965).
P—2 PAHOR S., NSE, **26**, 192 (1966).
R—1 ROBINSON A. H., Thesis, Stanford Univ., 1965.
S—1 SHURE K. et al., Ann. of Phys., **26**, 274 (1964).
T—1 TAKAHASHI H., JNE, **15**, 192 (1961).
V—1 VAN KAMPEN N. G., Physica, **21**, 949 (1955).
V—2 VAN KAMPEN N. G., Proc. Koninkl. Nederl. Acad., Series B, **63**, 92 (1960).
Z—1 ZELAZNY R. et al., Ann. of Phys., **16**, 69 (1961).
Z—2 ZELAZNY R. et al., Ann. of Phys., **16**, 81 (1961).
Z—3 ZELAZNY R., J. Math. Phys., **2**, 538 (1961).
Z—4 ZELAZNY R. et al., Physica, **27**, 797 (1961).
Z—5 ZELAZNY R., Nukla, **11**, 79 (1966).
Z—6 ZELAZNY R. et al., *IAEA, Phys. Fast. Intermed. Reactors*, vol. II, 1962, p. 55.
Z—7 ZELAZNY R., PICG, P/498, 1964.
Z—8 ZUMBRUM K., EIR—Bericht—72, 1965.

2.3. Metoda probabilităţilor de ciocnire

C—1 CARLVIK I., AE—279, 1967.
C—2 CARLVIK I., AE—281, 1967.
C—3 CARLVIK I., PICG, P/681, 1964.
M—1 MÄRKL H., PICG, P/640, 1964.
R—1 ROŞESCU T., *Collision probabilities in nuclear reactor theory* (Bibl.), IFA—FR—50, 1966.

2.4. Metoda transformatelor integrale

S—1 SNEDDON I. N., *Fourier Transforms*, Londra, McGraw Hill Book Co. Inc., 1951.
T—1 TAIT J. H., *An introd. to neutron transport theory*, Londra, Longmans, Green and Co., 1964.
T—2 TRANTER C. J., *Integral transforms in mathematical physics*, Methuen and Co., London 1956.

2.5. Metoda nucleelor integrale

A—1 AMALDI E., Handbuch der Physik, **XXXVIII**/2 (1959). Springer—Verlag, Berlin.
B—1 BROWN H. et al., DP—33, 1954; DP—64, 1956.
C—1 CASE K. M. et al., *Introd. to the theory of neutron diffusion*, LASL, 1953.
I—1 ISBIN H. S., *Nuclear reactor theory*, Reinhold Publ. Co., 1963.
K—1 KHRISTOV KHR. IA., AERE—Trans—831, 1959; AERE—Trans—832, 1959.
N—1 NELKIN M., Phys. Rev., **119**, 791 (1960).
R—1 *Reactor Handbook. Physics*, vol. IIIA, Interscience Publ., 1962.
W—1 WEINBERG A. M. et al., *The physical theory of neutron chain reactors*, Univ. of Chicago Press, 1958.
W—2 WIGNER E. et al., AECD—2275, 1944.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3

Aproximaţia înglobării invariante

Una dintre particularităţile cele mai remarcabile ale majorităţii domeniilor ştiinţei moderne — utilizarea avantajoasă şi uneori neaşteptată a rezultatelor dintr-un domeniu într-altul, cu care nu pare a avea nici o legătură — se regăseşte şi în fizica reactorilor nucleari.

În acest domeniu s-au dovedit deosebit de valoroase în ultimii ani lucrările astrofizicianului Ambarzumian [A-1] dedicate transferului radiativ în spaţiile intergalactice, bazate pe anumite principii foarte generale de invarianţă.

Deducerea şi generalizarea de către alt astrofizician reputat, Chandrasekhar [C-1], a ecuaţiilor lui Ambarzumian, printr-o formulare de tipul ecuaţiei lui Boltzmann tot în probleme de transfer al radiaţiei, a sugerat — datorită legăturilor strînse dintre ecuaţia lui Boltzmann pentru transferul radiaţiei şi ecuaţia de transport pentru neutroni — o extindere a acestor principii de invarianţă la tratarea problemelor de transport al neutronilor într-un mare număr de lucrări iniţiate de către Bellman şi colaboratorii săi [B-1], [B-2], [B-3].

Aceştia au încetăţenit şi o nouă denumire a metodei — înglobarea invariantă —, bazată pe una dintre caracteristicile ei matematice de bază. Dacă prin folosirea principiilor de invarianţă la descrierea proceselor neutronice din reactor autorii citaţi au putut ajunge la ecuaţia Boltzmann pentru transportul neutronilor, trebuie amintit că o cale matematică complet opusă au urmat alţi autori [B-2], care au demonstrat că, pornind de la ecuaţia Boltzmann, se poate ajunge la principiile de invarianţă în cauză.

Se obişnuieşte să se definească metoda înglobării invariante ca metoda matematică de abordare a unui mare număr de probleme din fizica matematică prin folosirea sistematică a principiilor de invarianţă la care se supun procesele studiate.

Această metodă conduce la posibilitatea, fundamentată riguros matematic, de a îngloba orice proces fizic particular într-o clasă mai generală de procese şi de a căuta apoi relaţiile funcţionale dintre diversele procese ale acestei clase, care constituie o problemă mai simplă din punct de vedere matematic.

Din aceste relaţii funcţionale se deduc o serie de proprietăţi ale proceselor înglobate, dintre care unele proprietăţi aparţin şi procesului studiat. Acest mod de a trata problema permite deducerea dintr-o dată a

Scanned with OKEN Scanner

mai multor date despre un proces fizic decît prin studierea lui individuală prin metodele clasice.

Drept parametri de înglobare ai problemelor întîlnite în studiul transportului neutronilor s-au folosit de către diverși autori geometria sau dimensiunile sistemului studiat (reactor, ansamblu critic sau subcritic, protecție etc.), densitatea mediului împrăștiant, densitatea combustibilului, forma cavităților, canalele din reactor, forma marginilor și condițiile la ele, albedoul, secțiunile neutronice, numărul de neutroni secundari după o ciocnire etc.

Astfel, în cazul unui mediu cu geometrie plană (o placă), în metoda înglobării invariante nu se mai pune problema studierii acestei plăci particulare, ci a unei submulțimi de plăci de grosimi diferite, în care este înglobată placa studiată, iar o problemă ce se poate pune în noua formulare mai generală este cea a variației fluxului de neutroni cu grosimea plăcilor. Răspunsul general va conține și pe cel particular la problema noastră.

Datorită acestui aspect de înglobare, metoda a fost considerată și tratată în același timp și ca o metodă de perturbație [B-7] a unui sistem general de procese fizice, în care înglobarea procesului studiat reprezintă perturbarea „mărimii" sistemului general.

Cu alte cuvinte, în cadrul acestei metode se înlocuiește studiul unei anumite probleme prin cel al unui sistem mai general de probleme generate de un singur parametru, care definește de altfel „mărimea" sistemului de înglobare.

Acest sistem are avantajul de a permite căutarea gradată a soluției începînd de la un singur membru al sistemului, care de obicei este degenerat, adică nu conține decît o mică cantitate din informația întregului sistem, pînă la găsirea soluției pentru întregul sistem.

Această ultimă soluție generală va conține și informația completă despre problema noastră particulară, pe care am înglobat-o în sistem și pe care o obținem cu legături și implicații profunde față de soluția generală.

Alături de modul de abordare probabilistic (vezi cap. 8), aproximația înglobării invariante constituie singurul caz cunoscut în care ecuațiile care guvernează procesele neutronice din reactorii nucleari sînt deduse principial diferit de metoda clasică a lui Boltzmann. Acest mod de abordare va fi deci independent de teoria spectrală a valorilor proprii, caracteristică metodelor clasice de tratare a transportului neutronilor.

Analitic, tot acest lanț de procese fizice sau matematice de înglobare, de aplicare a principiilor de invarianță, de soluționare se exprimă prin ecuații diferențiale sau integro-diferențiale neliniare și cu condiții inițiale.

Pe lîngă problemele de transfer al radiației și de transport al neutronilor, noua metodă s-a mai aplicat în ultimul timp cu succes și la probleme ca mersul la întîmplare (nu numai al neutronilor) [B-6]), la propagarea și împrăștierea undelor, la probleme cu margini variabile în timp,

Scanned with OKEN Scanner

la propagarea undelor radio prin medii stohastice, la difuzia luminii, la conducţia şi difuzia căldurii, la studiul liniilor de transmisie etc., ceea ce denotă marea generalitate şi fecunditate a metodei, calităţi previzibile datorită folosirii unor principii fizice atît de generale ca cele de invarianţă.

Întrucît aceste principii de invarianţă sînt strîns legate de cele de cauzalitate (deci de principiul lui Hadamard), era de aşteptat descoperirea unei legături a metodei înglobării invariante cu teoria semigrupurilor, care a fost de altfel pusă în evidenţă într-o serie de lucrări [B-8].

Perspective noi, insuficient analizate, s-au mai deschis metodei înglobării invariante încă din momentul descoperirii legăturilor ei cu principiul lui Stokes [B-8], [C-1], [W-3] şi a faptului că majoritatea problemelor din numeroasele domenii ale fizicii se pot reformula matematic în metoda înglobării invariante. Însăşi numeroasele aproximări matematice sau fizice pot fi considerate variante ale metodei înglobării invariante.

Metoda înglobării invariante, care era iniţial o metodă semiintuitivă — bazată mai mult pe sensul fizic — de înregistrare (numărare) analitică a particulelor (a neutronilor în cazul nostru) în decursul diverselor procese [B-7], [D-1], s-a dezvoltat matematic în special în legătură cu metoda „punctului de regenerare" [B-8], întîlnită în special la studiul proceselor de „ramificare" [B-8], care aparţin clasei mai generale a proceselor stohastice. Procesele de ramificare (*branching*) au un caracter general, fiind aplicate cu succes la multiplicarea neutronilor, la înmulţirea bacteriilor, la cascadele cosmice sau la cele electronice etc.

Aceste legături au condus la posibilitatea tratării în comun a problemelor de transport al neutronilor prin metodele înglobării invariante şi prin metodele stohastice, ca mersul la întîmplare sau metoda proceselor de ramificare.

Un impuls deosebit spre fundamentarea matematică riguroasă l-a primit metoda înglobării invariante în momentul în care s-a stabilit că ea poate fi considerată ca reprezentînd de fapt o versiune de „liberă decizie" din teoria programării dinamice [B-8]. Această nouă legătură s-a dovedit deosebit de utilă, deoarece a permis reformularea mai simplă a metodei înglobării invariante, a numeroaselor principii variaţionale deduse în teoria transportului neutronilor (vezi cap. 4). Acestea erau dificil de folosit în fizica reactorilor, în cazul surselor neuniforme, în timp ce în noua formulare această dificultate nu mai apare.

La rîndul ei, formularea variaţională de tip Hadamard a transportului neutronilor a condus la o generalizare matematică remarcabilă a metodei înglobării invariante [D-1].

După această succintă trecere în revistă a unor considerente generale despre aproximaţia înglobării invariante şi care a servit la localizarea ei printre celelalte metode matematice de abordare a unor probleme fizice, se impune o prezentare a particularităţilor ei.

Astfel, spre deosebire de metoda clasică de aproximare a transportului neutronilor, care conduce la o ecuaţie Boltzmann liniară cu condiţii

Scanned with OKEN Scanner

la margine, în noua aproximație se obțin pentru aceleași procese neutronice ecuații integro-diferențiale neliniare cu condiții inițiale, care sînt mai ușor de abordat — ca durată și ca formulare — la mașinile electronice de calcul și nu conduc la instabilități numerice în calcule ca problemele cu condiții la margine.

Această neliniaritate intrinsecă a ecuațiilor înglobării invariante, al cărei dezavantaj este compensat de absența condițiilor la margine, mai are și avantajul de a permite abordarea cu totul naturală a interacțiunilor nelineare n-n sau a celor ce conduc la modificarea mediului și care în teoria clasică a transportului neutronilor nu era posibilă.

Din punct de vedere matematic, trecerea de la ecuațiile liniare cu condiții la margine ale teoriei clasice a transportului la ecuațiile neliniare cu condiții inițiale ale înglobării invariante este echivalentă cu metoda de reducere la o ecuație Ricatti [B-3], curent întîlnită în fizico-matematică. Ea mai este echivalentă și cu o metodă de eliminare Gauss sau cu o metodă de factorizare matriceală [K-1].

Altă particularitate importantă a noii aproximații este aceea că lucrează cu mai puține funcții caracteristice ale mărimilor neutronice și, în orice caz, altele decît cele uzuale în teoria clasică a transportului. Aceste funcții sînt cele de reflexie,de transmisie și de scăpare și se găsesc ușor expresii de aceste funcții care să reprezinte clasicele mărimi de flux, densitate, curent sau distribuție neutronică.

Mai mult chiar, funcțiile de reflexie, transmisie și scăpare, caracteristice aproximației înglobării invariante, au permis stabilirea unor legături strînse și în anumite cazuri chiar echivalența acestei aproximații cu cea a matricei de răspuns [S-1], [R-1], folosită cu mult succes la calcule de criticitate sau de protecție.

Unul dintre rezultatele remarcabile ale acestor particularități îl constituie și faptul că, în calculul numeroaselor probabilități neutronice necesare în teoria transportului, prin înglobarea invariantă este inclusă în mod natural și direct „istoria" trecută a neutronilor, ceea ce în teoria clasică a transportului este imposibil. Această includere a „istoriei" trecute se datorește generalității procesului de înglobare invariantă, care se extinde și asupra variabilei temporale și este de o natură matematică cu totul diferită și mai generală decît cea care permite tratarea proceselor neutronice ca procese stohastice markoviene pe baza dependenței lor din istoria imediat anterioară.

Dezavantajele inițiale ale aproximației înglobării invariante de a furniza valori ale mărimilor studiate în interiorul mediului și de a nu fi fost aplicată decît la geometrii plane au fost înlăturate printr-o formulare nouă [P-1], legată de metoda funcțiilor proprii singulare și, respectiv, prin deducerea condițiilor în care se poate extinde la geometriile cilindrică și sferică [B-4].

După stabilirea valabilității aplicării noii aproximații la studiul transportului neutronilor, au apărut variante noi, mai puternice, mai

Scanned with OKEN Scanner

precise, cu limite mai largi, ca înglobarea invariantă totală, cea parțială, simetrică, geometrică sau prin albedo.

Au fost abordate probleme generale, ca statica și cinetica reactorilor nucleari și mai ales dificila, dar importanta problemă a cineticii reactorilor cuplați sau a criticității sistemelor de medii multiplicatoare [K-1], studiul fluctuațiilor neutronice, calculul probabilității unor procese neutronice, determinarea unor efecte perturbatoare în reactor, determinarea eficacității protecției contra radiațiilor în paralel cu formulările analoge prin metoda matricei de răspuns [S-1], studiul interacțiunilor neutron-neutron etc., rezolvarea problemelor stohastice de mers la întîmplare [B-6].

În paginile următoare vor fi schițate cîteva dintre metodele de abordare ale problemelor de transport al neutronilor prin înglobare invariantă.

3.1. „Recensămîntul" neutronilor

Modul cel mai simplu de abordare a transportului neutronilor prin metoda înglobării invariante constă în determinarea funcțiilor de reflexie, transmisie și pierderi neutronice în funcție de valorile aceleiași funcții inițiale (incidente) și de proprietățile mediului cu care interacționează neutronii.

Vom nota cu $r_i(x, y)$, $t_i(x, y)$ și $l_i(x, y)$ funcțiile amintite, care sînt definite prin :

$r_i(x, y)$ — fluxul probabil de neutroni în starea i, reflectat de o bară (mediu monodimensional) de lungime x, prin incidența unui flux de intensitate inițială y în x,

$t_i(x, y)$ — fluxul probabil de neutroni în starea i, transmis prin bara de lungime x, prin incidența unui flux de intensitate inițială y,

$l_i(x, y)$ — fluxul probabil de neutroni în starea i, absorbiți în bara de lungime x, prin incidența unui flux de intensitate inițială y,

$i = 1, 2, ..., N$; intensitatea y este reprezentată de un vector N-dimensional, ale cărui componente reprezintă intensitățile fluxurilor de neutroni în cele N stări pe care le pot avea.

Întrucît majoritatea aplicațiilor acestei metode s-au mărginit pînă acum la cazul monodimensional, îl vom adopta și în demonstrațiile care urmează, lăsînd cititorului curiozitatea de a folosi bibliografia citată în privința extensiunii metodei la cazul altor geometrii decît cea de placă [R-1].

În continuare se recurge la o aproximare discretă a proceselor neutronice prin împărțirea barei în segmente de lungimi foarte mici, soluția problemei în fiecare fiind înglobată în problema generală.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina relațiile care guvernează comportarea neutronilor în segmentul $(x, x + \Delta)$, considerăm că un capăt al barei este străbătut de un flux u_j de neutroni în starea j (de exemplu un anumit grup energetic), în timp ce celălalt capăt este străbătut de fluxul v_k de neutroni în starea k în sens contrar.

Cele trei procese amintite (reflexie, transmisie, pierderi) vor acționa diferit asupra celor două fluxuri de neutroni în proporții date de mărimile f, b și d, în care

$f_{jj}(x)\, u_j \Delta$ și $f_{kk}(x)\, v_k \Delta$ sînt fracțiunile de neutroni absorbiți din cele două fluxuri,

$b_{ij}(x)\, u_j \Delta$ și $b_{ik}(x)\, v_k \Delta$ — fracțiunile de neutroni reflectați în starea i din cele două fluxuri,

$d_{ij}(x)\, u_j \Delta$ și $d_{ik}(x)\, v_k \Delta$ — fracțiunile de neutroni transmiși în starea i $(i \neq k)$ din cele două fluxuri.

S-a considerat în definirea acestor fracțiuni că, în primă aproximație, efectele sînt proporționale cu mărimile fluxurilor (u_j și v_k) și cu dimensiunea segmentului (Δ). Efectele de ordinul doi vor fi proporționale cu $O(\Delta^2)$, deci foarte mici, și le putem neglija.

Aceste componente trebuie să satisfacă condiția de nenegativitate

$$\sum_{i=1}^{N} [r_i(x, y) + t_i(x, y) + l_i(x, y)] = \sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{3.1}$$

Se pot lua în considerare nu numai efectele interacțiunii neutronilor cu mediul, caracterizate prin cele trei procese indicate mai sus, ci și efectele propriilor interacțiunii ale neutronilor. Această componentă, care în tratarea clasică a transportului neutronilor prin ecuația lui Boltzmann introducea neliniarități, va fi dată în noua formulare de termeni de forma

$$u_j [1 - e^{-\Delta\varphi_j(u_j, v, x)}] \text{ sau } v_k [1 - e^{-\Delta\varphi_k(v_k, u, x)}].$$

Dacă segmentele Δ sînt suficient de mici, fracțiunile f, b, d, care indică probabilitățile diverselor procese neutronice ce influențează fluxurile inițiale de neutroni, vor fi independente de lungimea x a segmentelor. Aceste fracțiuni sînt mărimi pozitive cu ajutorul cărora putem defini o mărime negativă d_{jj} utilă în demonstrații:

$$d_{jj} = -\left[\sum_{i=1}^{N} b_{ij} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} d_{ij} + f_{ij}\right] \quad (j = 1, 2, \ldots N),$$

$$b_{ij} \geqslant 0\,;\, d_{ij} \geqslant 0\ (i \neq j)\,;\, f_{jj} \geqslant 0\,;\, d_{jj} \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Printr-o notație matriceală a fracțiunilor f, d, b

$$d_{ij}(x) = D(x)\,;\, b_{ij}(x) = B(x)\,;\, f_{jj}(x)\,\delta_{ij} = F(x),$$

în care dependența de x am păstrat-o doar pentru generalitate, se obține ecuația matriceală de definiție a mărimii d_{ij}

$$M(B + D + F) = 0, \tag{3.3}$$

unde

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Notînd cu $\varphi_i(u_i, v, x)$ fracțiunea de neutroni care interacționează direct, se mai definește și matricea

$$\Phi(u, v, x) = [\varphi_i(u_i, v, x)\ \delta_{ij}]. \tag{3.4}$$

Cu aceste notații, fluxul $v_i(x, y)$ de neutroni în starea i ce se deplasează în sens negativ (spre stînga) în bară, datorit unui flux incident în $(x + \Delta x)$ de intensitate y, este format din mai multe componente: fracțiunea din acest flux care este împrăștiată înainte, la care se adaugă fracțiunea retroîmprăștiată din fluxul incident la celălalt capăt și care se deplasează în direcția pozitivă (spre dreapta) în bară, din care se scade fracțiunea de neutroni absorbiți:

$$v(x, y) = (I + \Delta D)\, e^{-\Delta\Phi[v, r(x, v(x, y))]} + DBr[x, v, (x, y)], \tag{3.5}$$

care este o ecuație neliniară.

Prin raționamente fizice analoge se deduce

$$r(x + \Delta y) = \Delta By + (I + \Delta D)\, e^{-\Delta\Phi[r(x, y), v]}\ r[x, v(x, y)], \tag{3.6}$$

unde cele două componente se referă la împrăștierile înainte (spre stînga) și înapoi (spre dreapta);

$$t(x + \Delta, y) = t[x, v(x, y)], \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} l(x + \Delta, y) = {} & l[x, v(x, y)] + \Delta Fy + \Delta Fr[x, v(x, y)] + \\ & + (I + \Delta D)(I - e^{-\Delta\Phi[r(x, y), v]}\ r[x, v(x, y)]) + \\ & + (I + \Delta D)(I - e^{-\Delta\Phi[v, r(x, y)]}\ y). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ultimul termen a fost obținut mai ușor prin evaluarea separată a pierderilor în segmentele $[0, x]$ și $[x, x + \Delta]$ a absorbțiilor separate ale fluxurilor y și $r[x, v(x, y)]$ și în urma interacțiunilor celor două fluxuri.

Condițiile inițiale pentru o bară de lungime $x = 0$ sînt evidente:

$$r(0, y) = 0;\ t(0, y) = y;\ l(0, y) = 0, \tag{3.9}$$

care reprezintă faptul fizic că, în lipsa unui mediu material cu care fluxul de neutroni să interacționeze, nu există flux reflectat și nici pierderi, în timp ce transmisia e totală.

Este interesant de remarcat că formularea foarte generală, proprie acestei metode, permite să considerăm că chiar pentru $x = 0$ (adică bară de lungime nulă) poate exista totuși bară în domeniul negativ al lui x sau chiar o sursă de neutroni în $x = 0$, în ambele cazuri fluxul reflectat fiind diferit de zero și deci condiția inițială referitoare la fluxul reflectat devine în cazul cel mai general

$$r(0, y) = g(y). \tag{3.10}$$

Ecuațiile de mai sus pentru cele trei componente pot fi puse sub o formă diferențială dacă se notează

$$T_y \equiv \frac{\partial t_i(x, y)}{\partial y_j}; \quad R_y \equiv \frac{\partial r_i(x, y)}{\partial y_j}; \quad L_y \equiv \frac{\partial l_i(x, y)}{\partial y_j}, \tag{3.11}$$

cu ajutorul cărora, după unele transformări, ecuațiile iau forma următoarelor ecuații neliniare cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned} r_x - R_y [Dy + Br - \Phi(y, r)\, y] &= By + Dr - \Phi(r, y)\, r, \\ t_x - T_y [Dy + Br - \Phi(y, r)\, y] &= 0, \\ l_x - L_y [Dy + Br - \Phi(y, r)\, y] &= Fy + Fr + \Phi(y, r)\, y + \Phi(r, y)\, r. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Acest sistem de ecuații este completat de o ecuație de conservare care reprezintă faptul că suma fluxurilor reflectate, transmise sau absorbite trebuie să fie egală cu suma fluxurilor care au pătruns în bară prin ambele capete

$$M[r(x, y) + t(x, y) + l(x, y)] = M[y + g(y)]. \tag{3.13}$$

Existența și unicitatea soluțiilor acestor ecuații sînt demonstrate în lucrările de specialitate [B—3], [B—5].

Pe lîngă această variantă oarecum fizică, deoarece deducerea ecuațiilor înglobării invariante ale transportului neutronilor a fost efectuată pornind de la modelul fizic, a fost pusă la punct [B—7] și o variantă analitică în care se deduc o serie de ecuații caracteristice care satisfac principiile de invarianță și se demonstrează apoi că ecuația clasică de transport (Boltzmann) se reduce la aceste ecuații ale înglobării invariante.

În tabelele alăturate sînt date pentru comparație valorile dimensiunilor critice ale unui sistem monoenergetic de plăci, calculate prin metodele înglobării invariante (ÎI) și ale segmentării unghiulare Carlson (S_n) (vezi tabela 3.1), și valorile probabilităților totale de scăpare ale neutronilor din plăci de diferite grosimi (vezi tabela 3.2), calculate în aproximațiile înglobării invariante, variațională și iterativă.

TABELA 3.1 *

c în zona activă	Dimensiunea zonei active (în drum liber mijlociu, *d.l.m.*)			
	N	ÎI	N	S_n
2	3	0,6204	2	0,8194
2	5	0,6220	4	0,6526
2	7	0,6219	8	0,6274
2	11	0,6219	16	0,6232

* (3.1) Mingle J.O., TANS, **9**, 115, (1966).

Se observă că valorile (îi) sînt mai bune decît cele (S_n) pentru $n < 16$.

TABELA 3.2 *

Grosimea plăcii (*d.l.m.*)	Probabilitatea de scăpare		
	ÎI	variațional	iterativ
0,1	0,9110	0,9113	—
0,2	0,8506	0,8507	0,8504
0,3	0,7997	0,7999	0,7996
0,4	0,7549	0,7553	0,7549
0,5	0,7146	0,7153	0,7147

* (3.2) Dodson D.S. et al. TANS, **7**, 26, (1964).

BIBLIOGRAFIE

A—1 Ambarzumian V. A., Comp. Rend. Acad. Sci. SSSR, **38**, 229 (1943).
B—1 Bellman R. et al., J. Math. Anal. Appl., **10**, 112 (1965).
B—2 Bellman R. et al., Proc. Symp. Appl. Math., **XI**, 206 (1961).
B—3 Bellman R. et al., J. Math. Anal. Appl., **10**, 234 (1965).
B—4 Bailey P. B., J. Math. Anal. Appl., **8**, 144 (1964).
B—5 Brown T. A., J. Math. Anal. Appl., **11**, 236 (1965).
B—6 Bellman R. et al., Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.), **43**, 930 (1957).
B—7 Bailey P. B. et al., J. Math. Phys., **6** *(3)*, 453 (1965).
B—8 Bellman R. et al., Proc. Nat. Acad. Sci., **42**, 629 (1956).
C—1 Chandrasekhar S., *Radiative transfer*, Dover Publ., 1960.
D—1 Devooght J., J. Math. Anal. Appl., **13**, 216 (1966).
K—1 Kaway T., J. Nucl. Sci. Techn. Japan, **2** *(8)*, 275 (1965).
P—1 Pahor S., NSE, **26**, 192 (1966).
R—1 Rechard O. W., J. Math. Anal. Appl., **4**, 85 (1962).
R—2 Roşescu T., *Invariant imbedding in neutron transport theory*, IFA—FR—57, 1966.
S—1 Shimizu A., J. At. En. Soc. Japan, **5**, *5*, 359 (1963); J. Nucl. Sci. Techn. Japan, **3**, 57 (1966).
U—1 Ueno S., J. Math. Anal. Appl., **3**, 361 (1961).
W—1 Wing G. M., *An introduction to transport theory*, New York, John Wiley and Sons. Inc., 1962.
W—2 Wing G. M., J. Math. Anal. Appl., **2**, 277 (1961).
W—3 Wing G. M., J. Math. Anal. Appl., **9**, 85 (1964).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 4

Aproximaţiile calculului variaţional şi ale teoriei perturbaţiei

Metodele calculului variaţional, care au cunoscut o deosebită extindere în teoria ecuaţiilor fizicii matematice (a ecuaţiilor diferenţiale, integro-diferenţiale sau integrale), au fost folosite cu succes şi în soluţionarea ecuaţiei de transport al neutronilor.

Conferinţele internaţionale recente [C—1] de teorie a reactorilor nucleari au scos în evidenţă cu deosebită pregnanţă rolul din ce în ce mai mare pe care principiile variaţionale îl au în acest domeniu.

Pe lîngă posibilitatea de a aborda majoritatea problemelor din teoria clasică a transportului neutronilor, metodele variaţionale au permis şi tratarea acesteia prin teoria termodinamică (vezi cap. 5) şi mai ales prin metoda înglobării invariante (vezi cap. 3).

În cazul cel mai general, formularea variaţională a problemelor de fizică-matematică se bazează pe obţinerea unei funcţionale adecvate, din care se derivă apoi ecuaţiile caracteristice procesului fizic studiat pe baza proprietăţii de staţionaritate a funcţionalei respective. Aceasta constituie un principiu variaţional.

În particular, tratarea variaţională a transportului neutronilor în reactorul nuclear constă în obţinerea unor expresii aproximative sau exacte pentru mediile ponderate ale anumitor mărimi tipice din fizica reactorului şi care sînt de fapt soluţii ale ecuaţiei Boltzmann.

De obicei, aceste mărimi sînt cele care caracterizează global procesele sau mărimile din fizica reactorului, cum ar fi masa critică sau coeficientul de multiplicare al reactorului.

Tot calculul variaţional este cel care permite şi deducerea unor expresii variaţionale staţionare pentru aceste medii ponderate, iar în calculul funcţionalelor se folosesc funcţii aproximative (trial), adecvate fiecărei probleme în parte.

Aceste funcţii aproximative reprezintă fizic chiar fluxurile de neutroni pentru surse cu distribuţii cunoscute dacă ecuaţiile de bază sînt autoadjuncte.

Formularea variaţională a problemelor de fizică a reactorilor a cunoscut o dezvoltare foarte mare în acest domeniu — au apărut peste 230 de lucrări [R—1] —, deoarece are numeroase avantaje:

— poate fi aplicată la calculul majorităţii parametrilor importanţi din fizica reactorilor;

Scanned with OKEN Scanner

— se obțin expresii simple pentru diversele mărimi fizice atunci cînd este posibilă folosirea unor funcții aproximative simple;

— în majoritatea cazurilor se obțin precizii mari;

— se poate deduce cu ușurință gradul de precizie al unui rezultat obținut prin metoda variațională prin simpla folosire și comparare cu o funcție aproximativă mai exactă;

— trecerea de la soluțiile aproximative la cele exacte se obține, cînd este necesar, tot variațional prin folosirea unei metode de aproximare succesivă cu convergență rapidă;

— în cazul metodei variaționale a lui Schwinger, în care diversele expresii variaționale sînt independente de normarea funcțiilor aproximative, este suficientă doar deducerea formei acestor funcții;

— în cazurile în care expresiile variaționale exacte sînt niște maximuri, se poate cunoaște semnul erorii;

— eroarea în evaluarea unei mărimi este proporțională cu pătratul erorii cu care a fost aleasă funcționala, deci foarte mică.

Astfel, într-o lucrare [T—1] se arată că funcția aproximativă Φ_0 aleasă, fiind dată cu o eroare de $3 \cdot 10^{-3}$, se obține pentru mărimea calculată prin metoda variațională o eroare de $4 \cdot 10^{-7}$, de același ordin de mărime cu eroarea cu care se determină funcționala J.

De asemenea, calculul variațional aplicat teoriei transportului neutronilor este strîns legat de metoda perturbațiilor aplicată aceluiași domeniu, una dintre mărimile importante ale metodei perturbației fiind furnizată prin calcule variaționale. În cadrul calculului variațional generalizat se demonstrează de altfel că atît metoda perturbațiilor, cît și metoda variațională KRR* sînt cazuri speciale ale acestuia.

Avantajele enumerate mai sus au avut drept rezultat apariția unui mare număr de lucrări, acoperind majoritatea domeniilor fizicii reactorului.

Unul dintre motivele pentru care rezultatele obținute în formularea variațională sînt deosebit de exacte se datorește proprietății matematice a funcțiilor pozitive și cu un singur maxim de a putea fi aproximate oricît de bine prin alte funcții similare, precum și datorită caracterului autoadjunct al operatorului de transport în multe cazuri practice.

Din acest punct de vedere, teoria transportului neutronilor în reactori este net avantajată față de alte domenii, ca mecanica cuantică a mai multor corpuri, datorită faptului că distribuțiilor neutronice și adjunctele lor sînt totdeauna pozitive, deoarece reprezintă mărimi fizice reale (matematic această afirmație este valabilă cel puțin pentru distribuția neutronică corespunzătoare valorii proprii maxime a ecuației caracteristice de transport). În mecanica cuantică, funcția de undă nu poate fi pozitivă totdeauna, datorită principiului de excluziune.

* Metoda Kahan, Rideau, Roussopoulos.

Scanned with OKEN Scanner

În fizica reactorilor există însă și probleme, cum sînt cele de termalizare în medii finite etc., care nu se bucură de proprietatea de autoadjunctivitate.

Expresiile variaționale ale valorilor proprii ale operatorilor liniari de transport sau ale distribuțiilor neutronice conțin în acest caz integrale de combinații biliniare ale fluxului neutronic și adjunctei lui, datorită faptului că operatorul general Boltzmann (de transport) nu este autoadjunct. (deși nu a fost dată nici o demonstrație a necesității acestei limitări). Deci, în cazul general, funcționalele deduse prin metodele variaționale nu sînt niște limite superioare sau inferioare ale rezultatelor exacte. Dar în cazuri speciale, cum sînt problemele monoenergetice cu împrăștiere izotropă, termalizarea neutronilor în medii infinite etc., ecuațiile care le caracterizează devin autoadjuncte și principiile extremale proprii metodelor variaționale se aplică.

Aplicațiile metodelor calculului variațional în teoria transportului neutronilor și în general în fizica și tehnica reactorilor nucleari sînt deosebit de numeroase și ele se referă atît la probleme majore, ca cele de determinare a criticității mediilor multiplicatoare, a distribuțiilor neutronice, de cinetică a reactorilor, de termalizare a neutronilor sau de omogenizarea analitică a reactorilor eterogeni, cît și la probleme de amănunt, cum sînt cele dedicate calculului parametrilor rețelelor (lungime de difuzie, factor de utilizare termică, absorbție la rezonanță), la calculul albedoului, al consumului combustibilului nuclear, al eficacității sistemelor de control ale reactorilor, al reactorilor rapizi, al mediilor cu anizotropie mare etc.

Majoritatea acestor probleme sînt abordate riguros prin intermediul teoriei transportului neutronilor.

4.1. Formulări variaționale ale teoriei transportului

În metoda variațională există două posibilități de abordare, complet diferite, în soluționarea ecuațiilor de transport ale proceselor studiate [R—2].

În prima metodă, formularea variațională conduce la obținerea unei valori proprii sau a unei medii ponderate a soluției ecuației de transport.

În cea de-a doua metodă, mai generală, expresia variațională dedusă pentru un anumit proces fizic este considerată drept lagrangeanul sistemului de ecuații care descrie procesul, sistemul însuși de ecuații fiind considerat de tip Euler—Lagrange și tratat ca atare. Aceste ecuații sînt simplificate, pentru soluționarea lor mai ușoară, prin folosirea unor expresii aproximative pentru lagrangean, care conduce la soluții de asemenea aproximative în problema studiată.

Scanned with OKEN Scanner

În prima metodă se pornește de la constatarea că, în general, orice ecuație descriind un anumit proces fizic (ca transportul neutronilor) poate fi scrisă condensat

$$L\,\Phi\,(x) = S\,(x), \tag{4.1}$$

în care $\Phi\,(x)$ este fluxul de neutroni, $S\,(x)$ sursa de neutroni, L un operator liniar care poate lua diverse forme în funcție de geometrie, de condiții fizice etc.

În aproximația monogrup a ecuației integrale de transport, de exemplu, acest operator are forma

$$L\,\Phi\,(x) = \int_0^\infty \left[\delta\,(x - x') - \frac{1}{2}\,\Sigma\,E_1\,(\Sigma\,|\,x - x'\,|)\right]\Phi\,(x')\,dx'$$

(δ = funcția lui Dirac), (4.2)

în care în termenul $\frac{1}{2}\,\Sigma\,E_1$ recunoaștem un nucleu integral, iar în cazul general al ecuației de transport integrale

$$\Phi\,(x) = \int K\,(x, x')\,\Phi\,(x')\,dx' + S\,(x) \tag{4.3}$$

operatorul are expresia

$$L\,\Phi\,(x) = \int H\,(x, x')\,\Phi\,(x')\,dx', \tag{4.4}$$

unde

$$H\,(x, x') = [\delta\,(x - x') - K\,(x, x')]. \tag{4.5}$$

Pentru dezvoltarea teoriei este necesară cunoașterea operatorului adjunct și a unei funcționale J, care vor fi definite în cele ce urmează.

Operatorul adjunct L^+ este dat de expresia

$$L^+\,\Phi^+(x) = S^+\,(x), \tag{4.6}$$

în care prin indicele superior $+$ s-au notat mărimile adjuncte.

Din teoria operatorilor adjuncți se cunoaște că ei satisfac condiția

$$\int v\,(x)\,L^+\,u\,(x)\,dx = \int u\,(x)\,Lv\,(x)\,dx, \tag{4.7}$$

în care $u\,(x)$ și $v\,(x)$ sînt două funcții arbitrare (nesupuse vreunor condiții) în cazul că operatorul L nu conține și operatori diferențiali; în caz că conține astfel de operatori, iar fluxul $\Phi\,(x)$ și fluxul adjunct $\Phi^+\,(x)$ sînt supuse anumitor condiții, atunci și funcțiile respective trebuie să

satisfacă aceleași condiții. Operatorii L și L^+ sînt identici dacă nucleul integral $K(x, x')$ este simetric în x și x'. Dacă și termenii — sursă $S(x)$ și $S^+(x)$ sînt identici, atunci și fluxurile real și adjunct sînt identice.

În cazul aproximației monogrup exprimate prin ecuația (4.3), nucleul integral $K(x, x')$ poate avea diverse expresii, în funcție de condițiile problemei care conduc la funcționale diferite.

Nucleul integral poate fi pus sub forma

$$K(x, x') = c(x') \Sigma(x') k(x, x'),$$

$k(x, x')$ fiind o funcție simetrică în x și x' pentru care operatorul adjunct L^+ este dat de

$$L^+ \Phi^+(x) = \int [\delta(x - x') - c(x) \Sigma(x) k(x, x')] \Phi^+(x') \, dx'.$$

Dacă și $S^+(x) = c(x) \Sigma(x) S(x)$, atunci fluxul adjunct $\Phi^+(x)$ e dat de

$$\Phi^+(x) = c(x) \Sigma(x) \Phi(x).$$

Funcționala $J(\Phi, \Phi^+)$ se definește prin

$$J = (S^+\Phi) + (S\Phi^+) - (\Phi^+, L\Phi), \tag{4.8}$$

unde am folosit notațiile prescurtate

$$(S^+\Phi) = \int S^+(x) \Phi(x) \, dx, \tag{4.9}$$

$$(S\Phi^+) = \int S(x) \Phi^+(x) \, dx, \tag{4.10}$$

$$(\Phi^+, L\Phi) = \int \Phi^+(x) L\Phi(x) \, dx = \int \Phi(x) L^+\Phi^+(x) \, dx = (\Phi, L^+\Phi^+). \tag{4.11}$$

Funcționala J se poate reduce la forma mai simplă

$$J = S^+ \Phi = S \Phi^+, \tag{4.12}$$

în cazul în care se cunosc expresiile exacte ale fluxului $\Phi(x)$ și ale fluxului adjunct $\Phi^+(x)$.

Considerînd deci că fluxurile real și adjunct exacte pot fi exprimate prin niște funcții aproximative la care se adaugă termeni de corecție, adică

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0(x) + \varepsilon(x), \\ \Phi^+(x) &= \Phi_0^+(x) + \varepsilon^+(x), \end{aligned} \tag{4.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem prin simpla lor înlocuire în (4.8) o expresie mai comodă în calcule pentru funcționala J:

$$J = (S^+ \Phi_0) + (S \Phi_0^+) - (\Phi_0^+, L \Phi) + (\varepsilon^+, L \varepsilon) = J_0 + (\varepsilon^+, L \varepsilon). \quad (4.14)$$

Întrucît funcționala J este exprimată prin produse de forma $(S \Phi)$, rezultă că, în timp ce erorile asupra lui S și Φ sînt de ordinul întîi, eroarea asupra lui J va fi de ordinul doi, adică mult mai mică, ceea ce constituie unul dintre marile avantaje ale metodelor variaționale.

Această nouă formulare a funcționalei J mai pune în evidență o proprietate remarcabilă a acesteia. Într-adevăr, considerînd erorile ε și ε^+ ca variații infinitezimale de tip $\delta\Phi$ și $\delta\Phi^+$, rezultă din (4.14) că

$$\begin{aligned} \delta J/\delta \Phi &= 0 \quad \text{cînd} \quad \varepsilon^+ \to 0, \\ \delta J/\delta \Phi^+ &= 0 \quad \text{cînd} \quad \varepsilon \to 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

sau, cu alte cuvinte, funcționala J este chiar un extrem în raport cu variațiile arbitrare respective.

Întrucît ε și ε^+ sînt mici în raport cu Φ_0 și Φ_0^+, funcționala J se mai poate scrie

$$(S^+ \Phi) \approx J_0 = (S^+ \Phi_0) + (S \Phi_0^+) - (\Phi_0^+, L \Phi_0). \quad (4.16)$$

Întrucît numeroși autori au demonstrat că pentru un mare număr de probleme din fizica reactorilor eroarea pentru J_0 este pozitivă, rezultă că funcționala respectivă este un minim [ecuația (4.16), furnizîndu-ne deci o valoare minimă a lui $(S^+ \Phi)$].

În cazul general însă, semnul erorii asupra funcționalei depinde de expresia erorilor ε și ε^+ și a operatorului L.

În cazul folosirii funcției aproximative Φ_0, funcționala J mai poate fi scrisă și în forma mai comodă pentru unele calcule

$$J(\Phi_0) = 2 (Sc \sum \Phi_0) - (c \sum \Phi_0, L \Phi_0)$$

sau

$$J = \frac{(S c \sum \Phi_0)^2}{(c \sum \Phi_0, L \Phi_0)}.$$

O cale foarte comodă de a găsi funcționala optimă pentru o problemă dată și a-i determina rapid și eroarea constă în exprimarea funcțiilor care constituie aproximația de prim ordin a fluxului $\Phi_0(x)$ de neutroni și a fluxului adjunct $\Phi_0^+(x)$ în funcție de un sistem de parametri α_i; condițiile (4.15) se reduc la $(\partial J/\partial \alpha_i)(\partial \Phi_0/\partial \alpha_i)$ și, cum $(\partial \Phi_0/\partial \alpha_i) \neq 0$, rezultă că funcționala J trebuie să satisfacă condiția

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (4.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru a fi un extrem. Se rezolvă deci pentru un J dat ecuațiile (4.17), iar Φ_0 și Φ_0^+, în funcție de parametrii astfel obținuți, se introduc în ecuația (4.14) pentru a obține o nouă expresie, optimă pentru problema dată, a funcționalei J. În ceea ce privește evaluarea mărimii erorii asupra lui J, aceasta se obține calculînd funcționala J după ce am mărit numărul parametrilor α_i.

O altă formă obișnuită de a exprima funcționala J direct din ecuația de transport (4.3) este

$$J(\tilde{\Phi}) = \frac{\int \mathrm{d}x \int K(x, x')\, \tilde{\Phi}(x)\, \mathrm{d}x'}{\int [\tilde{\Phi}(x)]^2\, \mathrm{d}x} \quad \text{în cazul omogen (reactor nereflectat),}$$

$$J(\tilde{\Phi}) = \frac{\int \mathrm{d}x' \int K_{as}(x', x)\, \tilde{\Phi}(x')\, \mathrm{d}x}{\int [\tilde{\Phi}(x')]^2\, \mathrm{d}x'} \quad \text{în cazul neomogen (reactor reflectat),}$$

deoarece se demonstrează că obținerea extremului (aici un maxim) acestor funcționale prin condiția $\delta J = 0$, care definește principiul variațional, este echivalent cu rezolvarea ecuației integrale (4.3).

Aici $\tilde{\Phi}(x)$ reprezintă o funcție aproximativă pentru care numeroși autori au folosit diferite expresii.

Astfel, pentru determinarea criticității unui reactor sferic nereflectat s-a folosit:

a) $$\tilde{\Phi}(x) \simeq 1 - qx^2,$$

în care prin variația parametrului q se obține maximul funcționalei $J(\tilde{\Phi})$. O îmbunătățire a acestei funcții aproximative s-a obținut sub forma

b) $$\tilde{\Phi}(x) \simeq 1 - qx^2 - q'x^4.$$

În alte lucrări sînt luate separat funcții aproximative pentru zona activă de forma b și pentru reflector

c) $$\tilde{\Phi}(x) \simeq A + B/x$$

sau de forma

$$\frac{\sin kx}{kr} \quad \text{în zona activă,}$$

$$A\frac{\mathrm{e}^{-x/L}}{x} \quad \text{în reflector.}$$

În rezolvarea problemei Milne prin metoda variațională s-a mai folosit cu rezultate excelente funcția aproximativă

d) $$\tilde{\Phi}(x) \simeq A + B_2E_2(x) + B_3A_3(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

care furnizează fluxul neutronic cu eroare $< 0{,}3\,\%$ la $x = 0$ și cu erori scăzînd rapid pentru x crescător.

Chiar și o funcție aproximativă de forma

$$\text{e)} \qquad \widetilde{\Phi}(x) = \text{const.}$$

folosită la determinarea lungimii de extrapolare liniare a unei sfere „negre" (absorbante), a furnizat rezultate concordante cu cele obținute printr-o combinație a aproximației armonicilor sferice cu metoda perturbației.

Determinarea acestor funcții aproximative, care să fie în același timp și simple și corecte, constituie una dintre problemele principale ale folosirii metodei variaționale în teoria transportului neutronilor și o discuție aprofundată a ei este dată în [F—1].

Funcționale independente. Din expresia generală (4.8) a funcționalei J se observă că ea depinde nu numai de forma, ci și de mărimea funcțiilor Φ și Φ^+. Calculul funcționalei este mult simplificat dacă se elimină această dependență prin înlocuirea funcțiilor respective după cum urmează:

$$\begin{aligned} \Phi &= c_1 \Phi_1, \\ \Phi^+ &= c_1^+ \Phi_1^+, \end{aligned} \tag{4.18}$$

în care c sînt constante, și dacă variațiile $\delta\Phi$ și $\delta\Phi^+$ ale noilor funcții sînt tratate separat, în funcție de constantele c sau de Φ_1 și Φ_1^+.

În cazul primei variații, în funcție de δc_1 și δc_1^+, variația funcționalei J se scrie ușor

$$\delta J = \delta c_1 (S^+ \Phi_1) + \delta c_1^+ (S\Phi_1^+) - [c_1 \delta c_1^+ + c_1^+ \delta c_1] (\Phi_1^+, L\Phi_1). \tag{4.19}$$

Pentru ca funcționala J să fie un extrem pentru variațiile arbitrare ale constantelor c, trebuie ca valoarea acestora să fie dată de

$$c_1 = \frac{(S\Phi_1^+)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)} \; ; \; c_1^+ = \frac{(S^+ \Phi_1)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)}. \tag{4.20}$$

Înlocuind aceste expresii în (4.8), se obține

$$J = J_1 = \frac{(S\Phi_1^+)(S^+\Phi_1)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)}. \tag{4.21}$$

Luînd acum în considerare cea de-a doua variație în funcție de Φ_1 și Φ_1^+, pe care o putem scrie

$$\begin{aligned} c_1 \Phi_1 &= \Phi = \Phi_0 + \varepsilon, \\ c_1^+ \Phi_1^+ &= \Phi^+ = \Phi_0^+ + \varepsilon^+, \end{aligned} \tag{4.22}$$

obținem

$$J_1 = \frac{(S\Phi^+)\,(S^+\Phi)}{(\Phi^+, L\Phi)} = (S, \Phi^+), \tag{4.23}$$

deoarece $(S^+\,\Phi) = (\Phi, L^+\Phi^+) = (\Phi^+, L\Phi)$ pentru Φ și Φ^+ exacte.

În funcție de (4.22) și (4.23), J_1 devine

$$J_1 = (S\,\Phi_0^+) + (S\,\varepsilon^+) = S\,\Phi_0^+ + (\varepsilon^+, L\,\Phi_0) + (\varepsilon^+, L\varepsilon) \tag{4.24}$$

sau

$$J_1 = \frac{(S\Phi_0^+)\,(S^+\Phi_0)}{(\Phi_0^+, L\Phi_0)} - \frac{(\varepsilon^+, L\Phi_0)\,(\Phi_0^+, L\varepsilon)}{(\Phi_0^+,\ L\,\Phi_0)} + (\varepsilon^+, L\,\varepsilon). \tag{4.25}$$

În primă aproximație deci, expresia lui J, independentă de mărimile funcțiilor Φ și Φ^+, este

$$J = (S^+\,\Phi) \approx \frac{(S\Phi_0^+)\,(S^+\,\Phi_0)}{(\Phi_0^+, L\,\Phi_0)}. \tag{4.26}$$

Înainte însă de a prezenta un exemplu de calcul bazat pe această metodă variațională, mai sînt necesare cîteva precizări în privința operatorului L. În majoritatea cazurilor întîlnite în problemele practice, operatorul L se poate găsi într-unul dintre următoarele două cazuri (sau poate fi adus la o formă analogă):

— sau sînt satisfăcute condițiile pentru ca operatorul L și adjunctul său L^+ să fie identici, în care caz avem și $\Phi = \Phi_0$ (și considerînd $S^+ = S$, ceea ce este valabil prin intermediul anumitor transformări) și deci

$$J = (S^+\,\Phi) = (S\Phi^+) \simeq (2\,S\,\Phi_0) - (\Phi_0, L\,\Phi_0), \tag{4.27}$$

iar

$$J_0 = \frac{(S\Phi_0)^2}{(\Phi_0, L\Phi_0)},$$

— sau $S = S^+ = 0$ și deci L este dat de o ecuație caracteristică

$$L = I - \lambda F, \tag{4.28}$$

în care I este operatorul unitate, iar λ este o valoare proprie și deci

$$J = 0 = (\Phi^+\,\Phi) - \lambda\,(\Phi^+, F\,\Phi). \tag{4.29}$$

Această expresie a funcționalei poate fi pusă sub o formă remarcabilă care stă la baza metodei variaționale cunoscute sub numele de principiul lui Rayleigh:

$$J = \frac{(\Phi^+, F\Phi)}{(\Phi^+\,\Phi)}, \tag{4.30}$$

din care se vede că funcționala J se confundă cu inversa valorii proprii $1/\lambda$ în cazul folosirii valorilor exacte pentru Φ și Φ^+.

Aplicație la calculul lui p. Ca o aplicație a primei metode variaționale descrise în paragraful precedent se va calcula probabilitatea de evitare a capturii la rezonanță p în timpul încetinirii neutronilor prin ciocniri cu atomii moderatorului.

Pentru a o defini, pornim, ca de obicei, de la densitatea de ciocniri $\Phi(u)$ a neutronilor în timpul încetinirii, care, în cazul luării în considerare doar a ciocnirilor elastice în mediu omogen infinit, este dată de ecuația integrală

$$\Phi(u) = \int_0^u f(u-u')\, h(u')\, \Phi(u')\, du' + S(u), \tag{4.31}$$

în care

$$h(u') = \Sigma_s(u)/[\Sigma_s(u) + \Sigma_a(u)],$$

$S(u)$ — intensitatea sursei,

u — letargia neutronilor,

$$f(u) = \begin{cases} a\, e^{-u} & \text{pentru } 0 < u \leqslant u_m, \\ 0 & \text{în afara acestui domeniu,} \end{cases}$$

$$a = \frac{(A+1)^2}{4A};\ u_m = \log 1/\alpha;\ \alpha = \left[\frac{(A-1)}{(A+1)}\right]^2,$$

A fiind masa atomică a moderatorului.

Întrucît dependența limitelor de integrare de letargia u în ecuația (4.31) produce dificultăți în aplicarea directă a rezultatelor obținute în paragrafele precedente, o eliminăm prin redefinirea funcției de împrăștiere sub forma

$$\begin{aligned} \bar{f}(u) &= f(u) && \text{pentru } u \geqslant 0, \\ &= 0 && \text{pentru celelalte domenii.} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ecuația (4.31) se schimbă, și în forma operațională devine în acest caz

$$L\Phi = \int_0^\infty [\bar{f}(u-u')\, h(u') - \delta(u-u')]\, \Phi(u')\, du', \tag{4.33}$$

cu adjuncta

$$\Phi^+(u) = S^+(u) + h(u) \int_u^\infty f(u-u')\, \Phi^+(u')\, du'. \tag{4.34}$$

În funcție de densitatea de ciocniri, probabilitatea de evitare a capturii la rezonanță are definiția obișnuită

$$p = 1 - \int_0^\infty [1 - h(u')]\, \Phi(u')\, du'. \tag{4.35}$$

Observînd că $[1 - h(u')] = \Sigma_a/(\Sigma_a + \Sigma_s)$ reprezintă sursa adjunctă $S^+(u)$ și folosind expresia variațională (4.26) pentru $(S^+ \Phi)$, se obține următoarea expresie pentru funcționala J:

$$J = (1-p) \simeq \frac{\int_0^\infty S(u')\, \Phi_0^+(u')\, du' \int_0^\infty S^+(u')\, \Phi_0(u')\, du'}{\int_0^\infty \Phi_0^+(u')\, du' \left[\Phi_0(u') - \int_0^{u'} f(u'-u'')\, h(u'')\, \Phi_0(u'')\, du''\right]}. \tag{4.36}$$

Funcțiile Φ_0^+ și Φ_0 sînt aproximații de ordin întîi ale fluxului real și ale celui adjunct.

Această expresie a funcționalei J se reduce la

$$J = (1-p) \simeq \frac{1 - p_{nr}}{1 - p_{nr} + \frac{1}{\xi}\int_0^\infty \Phi_0^+(u')\, du' \int_0^{u'} S^+(u'')\, f(u'-u'')\, du''} \tag{4.37}$$

dacă considerăm că prima aproximație a densității de ciocnire $\Phi_0(u)$ și a adjunctei sale $\Phi_0^+(u)$ sînt date conform ecuației (4.31) de

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= S(u) + \int_0^u S(u)\, F(u-u')\, du', \\ \Phi_0^+(u) &= S^+(u) + \int_u^\infty S^+(u')\, F(u'-u)\, du', \end{aligned} \tag{4.38}$$

în care $h(u) = 1$, $F(u)$ reprezintă funcția lui Placzek, care pentru u mare ($u \geqslant 3\, u_m$) tinde spre valoarea $1/\xi$, iar p_{nr} este probabilitatea evitării capturii la rezonanță în aproximația rezonanțelor înguste.

Noua expresie a funcționalei J poate fi simplificată în continuare folosind expresia (4.34) pentru $\Phi_0^+(u)$ și schimbînd ordinea integrării, ceea ce conduce la

$$(1-p) = \frac{(1 - p_{nr})}{1 + \dfrac{\int_0^\infty S^+(u)\, du \int_0^\infty F(u-u')\, S^+(u')\, du'}{\int_0^\infty S^+(u)\, du}}. \tag{4.39}$$

Rezultate asemănătoare se obțin și în lucrarea [C—2], în care se calculează aceeași mărime printr-o metodă variațională pentru amestecuri de mai multe materiale moderatoare.

În problema precedentă, expresia lui L nu a conținut și operatori diferențiali care ar fi implicat satisfacerea condițiilor la limită ale funcțiilor Φ și Φ^+ și de către funcțiile auxiliare necesare la definirea adjunctelor.

Pentru a ilustra și cazul în care în expresia lui L apar și operatori diferențiali, se va studia variația reactivității unui reactor datorită introducerii unei bare de control în zona activă [R—2]. În cazul simplu al aproximației de difuzie monogrup în geometrie plană, această problemă este reprezentată matematic prin ecuația

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2} + B^2\right) \Phi(x) = 0, \tag{4.40}$$

cu condiția la margine impusă fluxului

$$\Phi(a) = \Phi(A) = 0, \tag{4.41}$$

și a cărei soluție clasică este chiar valoarea proprie minimă

$$B = \frac{\pi}{(A - a)}. \tag{4.42}$$

Sub formă operatorială necesară formulării variaționale, (4.40) devine

$$L\Phi = 0,$$

în care forma lui L se obține direct, permițîndu-ne trecerea la calculul adjunctei lui. În acest scop folosim proprietatea (4.7), care devine în condițiile concrete ale problemei noastre

$$\int_a^A v(x)\, L^+ u(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^A u(x)\, Lv(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^A v(x) \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B^2\right] u(x)\, \mathrm{d}x - u(x) \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^A + v(x) \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^A. \tag{4.43}$$

Impunînd condiția ca și $u(x)$ și $v(x)$ să se anuleze la $x = a$ și $x = A$, condiția (4.43) ne arată că operatorul L este autoadjunct, deoarece $L^+ = L$. Întrucît în ecuația de mai sus $S = S^+ = 0$, putem scrie operatorul L în forma

$$L = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B^2\right] = \left[I + \frac{1}{B^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right], \tag{4.44}$$

unde

$$\lambda = 1/B^2;\ F = -\,\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2,$$

care ne permite să exprimăm funcționala J sub forma principiului lui Rayleigh (4.30)

$$J = -\int_a^A \Phi \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x \Big/ \int_a^A \Phi^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.45}$$

În această expresie, valoarea minimă a funcționalei J furnizează valoarea optimă a lui B^2. În cazul folosirii funcției Φ exacte, B^2 este chiar J. De obicei nu se cunoaște Φ exact; în acest caz folosim o aproximație a lui Φ în funcție de un parametru α, care, introdusă în expresia (4.45), permite minimizarea lui J și deci obținerea lui B^2 optim. În acest scop alegem ca funcție aproximativă

$$\Phi_0(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2A}\right)[1 - \mathrm{e}^{-\alpha(x-a)}],$$

căreia îi corespunde o valoare B_0^2 care, față de B exact dat de (4.42), arată foarte mici abateri (vezi tabela 4.1).

TABELA 4.1

$V = \frac{2a}{\pi A}$	$\frac{B^2 A^2}{\pi^2}$	$\frac{B_0^2 A^2}{\pi^2}$
0,0	4,000	4,016
0,1	4,562	4,582
0,2	5,252	5,278
0,3	6,111	6,146
0,4	7,200	7,246
0,5	8,608	8,665
0,6	10,472	10,541

Cea de-a doua metodă, în care funcționala J dată de (4.8) este considerată lagrangeanul unui sistem de ecuații, se bazează pe identificarea ecuațiilor procesului studiat, exprimate prin operatorul L și adjunctul său L^+, drept un sistem de ecuații Euler—Lagrange:

$$\begin{aligned} L\Phi &= S, \\ L^+\Phi^+ &= S^+. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Aceste ecuații apar de altfel și din condiția de anulare a variației funcționalei (lagrangeanului) J:

$$\delta J = 0,$$

provocată de variațiile funcțiilor Φ și Φ^+.

$$\delta J = (\delta\Phi^+, S - L\Phi) + (\delta\Phi, S^+ - L^+\Phi^+) = 0. \tag{4.47}$$

Această deducere a ecuațiilor Euler—Lagrange are și avantajul de a furniza o verificare a corectitudinii cu care s-a obținut J.

În această metodă, formularea variațională permite exprimarea funcționalei J în funcție de niște aproximații comode și ușor de folosit ale funcțiilor Φ și Φ^+ (de forma întîlnită și în paragraful precedent $\Phi = \Phi_1 + \varepsilon$ etc.), iar condiția de anulare a variației δJ a acestei funcționale furnizează un sistem de ecuații Euler—Lagrange (ca ecuația (4.46)), al căror avantaj deosebit constă în caracterul lor mai simplu decît al ecuațiilor originale.

Pentru ilustrarea celei de-a doua metode, vom demonstra că, în cazul aproximării distribuției unghiulare $\Phi(x, \mu)$ a neutronilor printr-o funcție liniară în mediu cu împrăștiere izotropă, cea mai bună aproximare a ecuației de transport monoenergetice este aproximația difuziei.

În acest scop se scrie ecuația de transport monoenergetică în mediu cu împrăștiere izotropă și geometrie plană

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \frac{\Phi(x, \mu)}{l} = \frac{S(x)}{2} + \frac{c}{2l} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu') \, d\mu'. \tag{4.48}$$

Explicitînd în această ecuație forma operatorului L, obținem ușor ecuația pentru operatorul adjunct L^+:

$$-\mu \frac{\partial \Phi^+}{\partial x} + \frac{\Phi^+}{l} = \frac{S^+(x)}{2} + \frac{c}{2l} \int_{-1}^{+1} \Phi^+(x, \mu') \, d\mu'. \tag{4.49}$$

Ecuațiile (4.48) și (4.49) constituie sistemul Euler—Lagrange pentru problema dată.

Funcționala J dată de (4.8), care joacă rolul de lagrangean în această problemă, se obține sub forma

$$J = (S^+ \Phi) + (S \Phi^+) + (\Phi^+, L \Phi) = \tag{4.50}$$

$$= \int dx \int_{-1}^{+1} d\mu \left[-\Phi^+ \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\Phi^+ \Phi}{l} + \frac{S \Phi^+}{2} + \frac{S^+ \Phi}{2} + \frac{c \Phi^+}{2l} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu') d\mu' \right].$$

Evaluînd variația lui J în funcție de variațiile lui Φ și Φ^+ și impunîndu-i lui J condiția de a fi un extrem, adică anulînd variația, se obțin chiar ecuațiile (4.48) și (4.49).

Drept funcții aproximative se aleg primii doi termeni din dezvoltarea în armonici sferice a fluxului direcțional

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{2} \Phi_0(x) + \frac{3}{2} \mu \Phi_1(x),$$

$$\Phi^+(x, \mu) = \frac{1}{2} \Phi_0^+(x) + \frac{3}{2} \mu \Phi_1^+(x),$$

care, introduse în (4.50), conduc la o expresie aproximativă a lagrangeanului

$$J_0 = \frac{1}{2}\int dx\left[S\Phi_0^+ + S^+\Phi_0 - \frac{3c}{l}\Phi_1^+\Phi_1 - \frac{1-c}{l}\Phi_0^+\Phi_0 - \Phi_1^+\frac{d\Phi_0}{dx} - \Phi_0^+\frac{d\Phi_1}{dx}\right]. \tag{4.51}$$

Anulînd variația acestei aproximații a lui J, se obțin noile ecuații mai simple decît (4.48) și (4.49) ale sistemului Euler—Lagrange al problemei:

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{1-c}{l}\Phi_0 = S, \\ &\Phi_1 = -\frac{l}{3c}\frac{d\Phi_0}{dx}, \\ &\frac{d\Phi_1^+}{dx} + \frac{1-c}{l}\Phi_0^+ = S^+, \\ &\Phi_1^+ = \frac{l}{3c}\frac{d\Phi_0^+}{dx}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

care nu sînt altceva decît ecuațiile aproximației de difuzie și care constituie demonstrarea propusă în enunțul problemei.

Criticitatea reactorului cu reflector infinit. O aplicație practică a metodei variaționale la calculul criticității unui reactor termic omogen cu reflector infinit (identic cu moderatorul din zona activă), expusă în [W—1], a condus la rezultate remarcabil de concordante cu cele experimentale sau cu cele analitice exacte.

Ecuația de transport care descrie un astfel de reactor este de forma

$$D_t\Delta\Phi_t - \Sigma_{am}\Phi_t - \Sigma_{au}(x)\Phi_t + k\int\Sigma_a\Phi_t(x')K(x,x')\,dx' = 0, \tag{4.53}$$

unde $\Sigma_a = \Sigma_{am} + \Sigma_{au}$.

În această ecuație, secțiunea de absorbție a moderatorului Σ_{am} este constantă în zona activă, în timp ce secțiunea de absorbție a combustibilului Σ_{au} depinde, datorită arderii (consumării) lui, de poziția x și este, evident, nulă în reflector.

Pentru a putea aplica metoda variațională, trebuie transformată ecuația (4.53) într-o ecuație integrală, operație efectuabilă de obicei prin folosirea unui nucleu integral (funcție Green) de difuzie de forma

$$G(x,x') = \frac{\exp\left[-\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2}|x-x'|\right]}{4\pi D_t|x-x'|}. \tag{4.54}$$

Dacă acest nucleu integral satisface condiția

$$\chi(x) = \int \mathrm{d}x'\, G(x, x')\, S(x'), \tag{4.55}$$

care reprezintă o soluție a ecuației de difuzie (4.53), scrisă sub forma mai cunoscută (neomogenă)

$$D_t \Delta \chi(x) - \Sigma_{am}\, \chi(x) + S(x) = 0, \tag{4.56}$$

atunci din identificarea termenului-sursă $S(x)$ din ecuația (4.56) cu ultimii doi termeni din ecuația (4.53) rezultă

$$\Phi_t(x) = \int \mathrm{d}x'\, G(x, x') \left[-\Sigma_{au}(x')\, \Phi_t(x') + k \int_{ZA} \mathrm{d}x''\, \Sigma_a \Phi_t(x'')\, K(x', x'') \right], \tag{4.57}$$

$$= \int_{ZA} \mathrm{d}x' \Phi_t(x') \left[-\Sigma_{au}\, G(x, x') + k\, \Sigma_a\, H(x, x') \right],$$

unde

$$H(x, x') = \int \mathrm{d}x''\, G(x, x'')\, K(x'', x').$$

Ca și în cazurile precedente, rezolvarea acestei ecuații integrale prin metoda variațională se reduce la găsirea unei funcționale care să fie un minim.

În cazul de față, această funcțională se obține prin multiplicarea ecuației (4.57) cu $\Phi_t(x)$ și integrarea pe volumul zonei active, operații care conduc la expresia

$$\int_{ZA} [\Phi_t(x)]^2\, \mathrm{d}x + \Sigma_{au} \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x'\, \Phi_t(x)\, G(x, x')\, \Phi_t(x'') - \tag{4.58}$$

$$- k\, \Sigma_a \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x' \Phi_t(x)\, H(x, x')\, \Phi_t(x') = 0.$$

Funcționala care rezultă din ecuația (4.58) nu este altceva decît factorul de multiplicare k și are expresia

$$k = \frac{\int_{ZA} [\Phi_t(x)]^2\, \mathrm{d}x + \Sigma_{au} \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x' \Phi_t(x)\, G(x, x')\, \Phi_t(x')}{\Sigma_a \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x' \Phi_t(x)\, H(x, x')\, \Phi_t(x')}. \tag{4.59}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie variațională a factorului de multiplicare este suficient de exactă pentru a furniza o valoare corectă a acestui factor chiar la folosirea unei aproximații grosolane a lui $\Phi_t(x)$.

Un exemplu numeric va ilustra această afirmație. Considerînd că fluxul termic de neutroni în zona activă are o valoare constantă și egală cu unitatea $\Phi_t = 1$, expresia variațională a lui k devine

$$k = \frac{V_{ZA} + \Sigma_{au} \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x'\, G(x, x')}{\Sigma_a \int_{ZA} \mathrm{d}x \int_{ZA} \mathrm{d}x' H(x, x')}. \tag{4.60}$$

Considerînd reactorul de formă plană (paralelă cu planul yz) și în aproximația monogrup în care nucleul de difuzie plan are expresia

$$G_{pl}(x, x') = \left[\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} \Big/ 2\Sigma_{am}\right] \exp\left[-\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} |x - x'|\right], \tag{4.61}$$

rezultă

$$K(x, x') = \delta(x - x'); \quad H(x, x') = G(x, x')$$

și deci

$$k = \frac{2R + \Sigma_{au} I}{\Sigma_a I} = \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_a} + \frac{2R}{\Sigma_a I}, \tag{4.62}$$

unde R este semigrosimea zonei active, iar

$$I = \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}x \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}x' \left[\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} \Big/ 2\Sigma_{am}\right] \exp\left[-\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} |x - x'|\right] = \tag{4.63}$$

$$= \Sigma_{am}^{-1}\left[2R - \left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{-1/2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\frac{\Sigma_{am}}{D_t}|x-x'|}\right)\right].$$

Cu aceste expresii se obține factorul de multiplicare al reactorului-placă de grosime $2R$ înconjurat de reflector infinit:

$$k = 1 + \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_a} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} R}}{2\left(\frac{\Sigma_{am}}{D}\right)^{1/2} R - 1 + \mathrm{e}^{-2R\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2}}} = 1 + \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_a} A. \tag{4.64}$$

Pentru valori mici ale lui $\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} R$, expresia factorului de multiplicare k se simplifică la

$$k \simeq 1 + \frac{\Sigma_{am}}{\Sigma_a \left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} R} = 1 + \frac{1-f}{\left(\frac{\Sigma_{am}}{D_t}\right)^{1/2} R}, \tag{4.65}$$

în care s-a ținut seama de definiția factorului de utilizare termică

$$f = \frac{\Sigma_a - \Sigma_{am}}{\Sigma_a} = \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_a}. \tag{4.66}$$

Această simplificare este valabilă deoarece pentru grosimi mici ale reactorului-placă aproximarea distribuției fluxului termic de neutroni printr-o valoare constantă și egală cu unitatea este foarte apropiată de realitate.

Rezultatele acestor calcule pentru un $f = 0{,}84$ sînt date sub forma curbelor din figura 4.1.

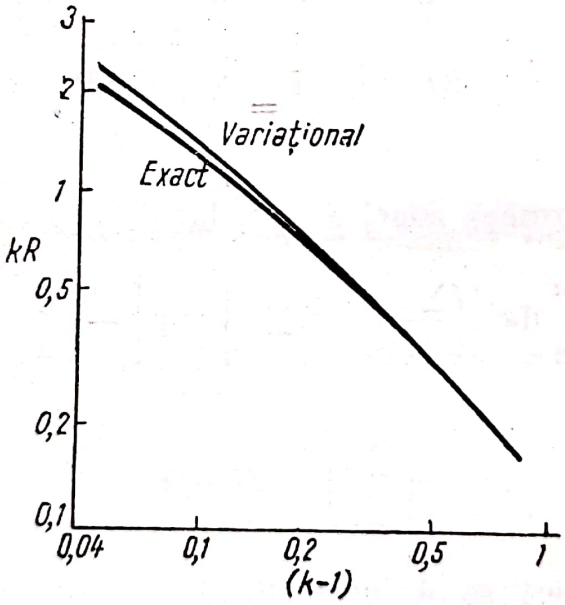


Fig. 4.1

Metoda variațională expusă conține însă în ea însăși posibilitatea îmbunătățirii rezultatelor și în cazuri mai complicate, considerînd că fluxul termic de neutroni este dat de o funcție de distribuție de forma

$$\Phi_t(x) = 1 - \beta x^2.$$

Introducînd această expresie în funcționala (4.59), se poate deduce β optim, impunînd condiția ca factorul de multiplicare k (β) să fie staționar.

Metoda variațională a mai fost folosită cu succes la reactori omogeni cu apă și uraniu îmbogățit cu reflector infinit de apă, folosind pentru transformarea ecuației de transport într-o ecuație integrală un nucleu integral sintetic (de forma sumei a patru exponențiale ; vezi § 2.5).

Rezultatele calculelor referitoare la masa critică a acestor reactori s-au dovedit mai apropiate de cele experimentale decît cele obținute prin aproximația clasică de difuzie bigrup (vezi fig. 4.2).

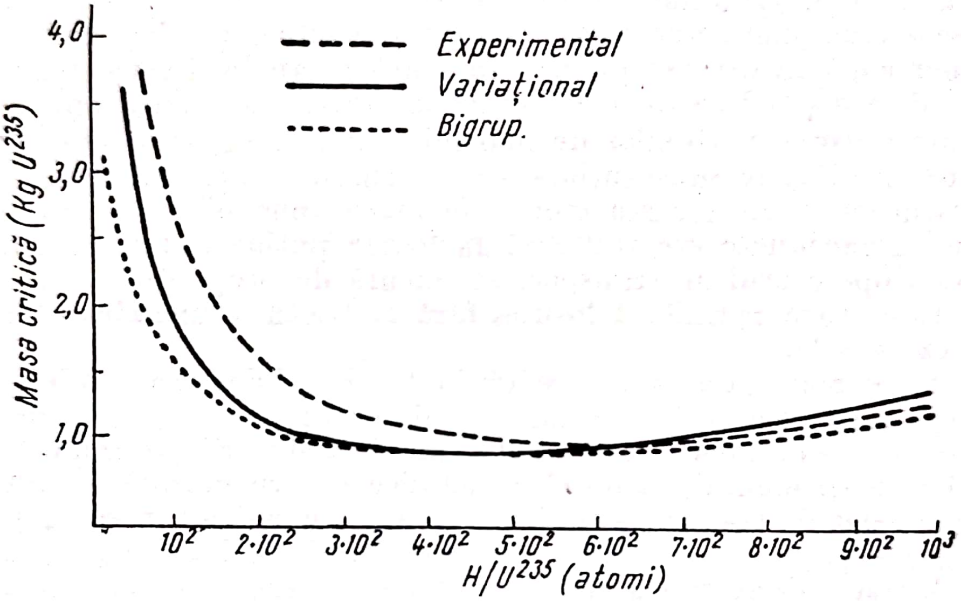


Fig. 4.2

4.2. Teoria perturbațiilor în transportul neutronilor

Privită dintr-un punct de vedere restrîns, folosirea teoriei perturbațiilor în fizica reactorilor nucleari se reduce la determinarea efectelor perturbatoare asupra distribuțiilor de neutroni ca urmare a apariției unor factori perturbatori, avînd deci un domeniu de aplicații îngust, dar important practic. Dacă se consideră însă că fiecare proces neutronic (fisiune, absorbție, împrăștiere, criticitate etc.) suferit de neutroni în cursul transportului lor în reactor reprezintă o perturbație a sistemului din starea imediat precedentă, reiese faptul important că această teorie poate fi aplicată majorității problemelor întîlnite în aplicarea ecuației de transport la cazuri practice și chiar în problemele de teorie a transportului.

Scanned with OKEN Scanner

Esențialul în teoria perturbației îl constituie posibilitatea de a formula ecuația de transport pentru cele două stări—neperturbată (luată drept referință) și perturbată — și deducerea, prin compararea acestor ecuații sau a soluțiilor lor, a unor expresii pentru mărimile perturbate.

Un avantaj major al acestei teorii îl constituie posibilitatea ei de a fi aplicată ecuației de transport în oricare dintre aproximațiile acesteia: integro-diferențială [T—1], integrală [D—1], de difuzie [G—1] etc.

Printre rezultatele teoretice importante obținute în teoria transportului neutronilor prin folosirea metodelor teoriei perturbației se numără introducerea noțiunilor de flux, curent, densitate de neutroni adjuncte, fără un sens fizic real, dar și a funcției de importanță neutronică (definită ca integrală a unui produs de funcții neutronice reale și adjuncte) cu un sens fizic bine determinat și care reprezintă o pondere cu care neutronii participă la diverse procese în reactor sau la diverse regiuni din reactor (deci o pondere nucleară și geometrică în același timp).

Introducerea noțiunilor de mărimi adjuncte în teoria transportului a condus la o lărgire substanțială a domeniului de aplicabilitate al metodelor variaționale în această teorie, deoarece aplicabilitatea doar la problemele autoadjuncte era restrînsă la foarte puține cazuri practice. Într-adevăr, operatorul de transport se bucură de proprietatea de autoadjunctivitate, care permite folosirea fără restricții a metodelor variaționale (vezi § 4.1).

Printre rezultatele practice obținute prin folosirea teoriei perturbației în fizica reactorilor se numără determinarea efectelor perturbatoare asupra funcționării reactorului, ale introducerii în zona activă a blocurilor experimentale, a foițelor metalice pentru măsurători prin activare, a barelor de control, a radioizotopilor, a canalelor, precum și determinarea efectelor consumului combustibilului nuclear, ale acumulării produselor de fisiune sau a elementelor transurane, a variațiilor de temperatură, de reactivitate, de geometrie sau de compoziție [R—3].

De asemenea metodele teoriei perturbației au mai fost folosite la calcule de optimizare (a distribuției combustibilului, a formei fluxului, a masei critice etc.) și de protecție contra radiațiilor.

În cele ce urmează vor fi schițate elementele de bază ale teoriei perturbației în fizica reactorilor, în formularea integro-diferențială a ecuației de transport [T—1].

În formularea cea mai generală, problema ce trebuie rezolvată în cadrul acestei teorii este de a determina ce perturbație (tip, mărime, modalitate) trebuie introdusă într-un mediu multiplicator neutronic (un reactor nuclear de exemplu) a cărui stare inițială (staționară sau nu) a fost variată de un alt efect perturbator, pentru a-l readuce la starea inițială.

Întrucît efectul perturbator ce trebuie introdus pentru a restabili situația inițială este egal (și de semn contrar) celui perturbator inițial, rezultă că evaluarea anunțată se referă și la aceasta.

Scanned with OKEN Scanner

Ca exemplu vom considera consumul combustibilului nuclear datorit funcționării reactorului. Întrucît masa de uraniu scade prin funcționare, ea poate fi considerată ca un efect perturbator care poate conduce la oprirea reactorului.

Calculul perturbației furnizează mărimea efectului și valoarea cantității noi de uraniu ce trebuie introdus în reactor pentru a-i asigura o funcționare constantă.

Ecuația de transport integro-diferențială în aproximația independentă de timp (staționară) este exprimată în funcție de un parametru α sub forma

$$v\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, v, \Omega) + (\alpha + \Sigma v)\, \Phi(\mathbf{r}, v, \Omega) =$$

$$= \iint v' c(v') \Sigma(v') f(v', \Omega' - v, \Omega)\, \Phi(\mathbf{r}, v', \Omega')\, dv'\, d\Omega', \qquad (4.67)$$

unde

$$\Sigma = l^{-1} = N(\sigma_e + \sigma_{in} + \sigma_f + \sigma_c),$$

$$\sigma\Sigma = N(\sigma_e + \sigma_{in} + \nu\sigma_f),$$

$$c(v')\, f(v', \Omega' \to v, \Omega) = \nu p_f f_f + p_{in} f_{in} + p_e f_e,$$

$p_{f,in,e}$ reprezintă probabilități de fisiune, de împrăștiere inelastică, elastică etc.

și în care α_i sînt acele valori proprii (dependente de geometria și de proprietățile nucleare ale mediului multiplicator) pentru care ecuația de transport are soluții; pentru $\alpha_0 = 1$ reactorul este critic.

Ecuația de transport adjunctă se scrie mecanic

$$-v\Omega \operatorname{grad} \Phi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) + (\alpha_1 + \Sigma_1 v)\, \Phi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = \qquad (4.68)$$

$$= \iint v c_1(v) \Sigma_1(v) f(v, \Omega \to v', \Omega')\, \Phi^*(\mathbf{r}, v', \Omega')\, dv' d\Omega'.$$

În formularea operațională, particularitățile teoriei perturbației în fizica reactorilor apar și mai pregnant, deoarece nu mai sînt legate de forma ecuației de transport.

Considerînd că operatorul de transport (diferit în formularea integrală de cea integro-diferențială sau de cea a aproximației de difuzie) este T, putem scrie ecuația de transport sub forma

$$T\Phi = 0, \qquad (4.69)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar cea adjunctă

$$T^*\Phi^* = 0. \tag{4.70}$$

Dacă operatorul T este considerat a fi exprimat printr-o matrice, atunci operatorul adjunct T^* se obține prin înlocuirea fiecărui element al matricei T cu complex conjugatul său și prin schimbarea coloanelor cu liniile și invers.

Funcțiile proprii ale operatorului de transport adjunct T^* sînt chiar fluxurile adjuncte. Proprietățile acestora, demonstrate în teoria operatorilor liniari, sînt date de

$$\int_V \Phi_K^* \, T \, \Phi_K \, \mathrm{d}V = \int_V \Phi_K \, T^* \, \Phi_K^* \, \mathrm{d}V. \tag{4.71}$$

Considerînd că perturbația uneia sau a mai multor mărimi neutronice care caracterizează reactorul și care apar în ecuația de transport se traduce prin perturbația ΔT a operatorului de transport, se poate scrie ecuația stării perturbate

$$(T + \Delta T)\, \Phi_p = 0, \tag{4.72}$$

unde Φ_p reprezintă fluxul perturbat.

În continuare se folosesc o serie de operații matematice caracteristice teoriei perturbației, care constă în înmulțirea ecuației perturbate cu fluxul adjunct și a ecuației adjuncte cu fluxul perturbat, scăderea și integrarea lor, operații efectuate cu scopul de a folosi proprietățile (4.71) și se obține

$$\int_V \Phi^* \, T \, \Phi_p \, \mathrm{d}V + \int_V \Phi^* \Delta \, T \, \Phi_p \, \mathrm{d}V - \int_V \Phi_p \, T^* \, \Phi^* \, \mathrm{d}V = 0 \tag{4.73}$$

sau

$$\int_V \Phi^* \Delta \, T \, \Phi_p \, \mathrm{d}V = 0, \tag{4.74}$$

deoarece primul și al treilea termen sînt egali conform proprietății (4.71).

ΔT este efectul căutat al perturbației în timp ce produsul $\Phi^* \, \Phi_p$ constituie ponderea perturbației.

Deoarece în multe cazuri (în special în aproximația monogrup) diferența dintre fluxul perturbat și cel inițial este foarte mică, ponderea perturbației este proporțională cu produsul $\Phi^* \, \Phi$ sau cu pătratul fluxului Φ^2 în cazul operatorilor T autoadjuncți.

Explicitînd expresia (4.74) a mărimii efectului perturbației, se mai deduce că ponderea perturbației coeficientului de difuzie este pătratul gradientului fluxului etc.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

A—1 Abagian A. A. et al., PICG, P/364, 1964.
C—1 Conferința internațională de metode de calcul în fizica reactorilor, Argonne Nat. Lab., 17—19 mai 1965.
C—2 Corngold N., Proc. Phys. Soc., **A70**, 793 (1957).
D—1 Davison B., *Neutron transport theory*, Oxford, Clarendon Press, 1957.
F—1 Francis N. C. et al., Progr. Nucl. En., Ser. I, **3**, 360 (1959).
G—1 Glasstone S. et al., *The elements of nuclear reactor theory*, Princeton, New York, D. Van Nostrand Co., 1952.
K—1 Kahan T. et al., *Les metodes variationelles*, Paris, Gauthier—Villars, 1956.
P—1 Pendlebury E. G., Proc. Phys. Soc. (Londra), **A68**, 474 (1955).
R—1 Roșescu T., *Variational methods in nuclear reactor theory* (bibl.), IFA—FR—52, 1966.
R—2 Rowlands J. W., JNE, 13,176 (1961).
R—3 Roșescu T., *Perturbation theory in reactor physics* (bibl.), IFA—FR—54, 1966.
R—4 Rakavy G., NSE, **8**, 281 (1960).
T—1 Tait J. H., *An introduction to neutron transport theory*, Londra, Longmans, Green and Co., 1964.
T—2 Tait J. H., Proc. Phys. Soc., Londra, **A67**, 615 (1954).
W—1 Weinberg A. M. et al., *The physical theory of neutron chain reactors*, Chicago, Univ. Press, 1958.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

Aproximaţia termodinamică a transportului neutronilor

Studiul cineticii reactorilor nucleari a ridicat probleme din ce în ce mai complexe o dată cu dezvoltarea energeticii nucleare şi a numeroaselor tipuri noi de reactori de cercetare construiţi în ultimii ani, ca reactorii pulsaţi sau cei cu deplasare spectrală, reactorii breederi (reproducători), reactorii rapizi, intermediari sau cuplaţi şi cei cu regiuni multiple.

Acest studiu s-a bazat, ca de obicei, pe ecuaţia de transport pentru neutroni, dar dificultăţile de calcul întîlnite în cazul folosirii acestei ecuaţii în numeroasele situaţii practice şi necesitatea de a găsi simultan relaţiile dintre parametrii de difuzie, cei cinetici şi cei termici ai neutronilor şi ai mediilor cu care interacţionează au obligat pe cercetătorii acestor domenii ale fizicii reactorilor nucleari de a căuta noi metode de aproximare sau chiar de abordare a lor.

Întrucît parametrii amintiţi aparţin unor procese fizice diferite care în mod obişnuit sînt tratate matematic în mod diferit, o astfel de nouă metodă ar fi trebuit să se bucure de o suficientă generalitate şi rigurozitate în acelaşi timp pentru a putea îngloba studiul unor procese diferite.

Din fericire, o astfel de metodă, de mult cunoscută şi bine pusă la punct atît teoretic, cît şi ca abordare şi rezolvare a problemelor practice, este cea bazată pe teoria termodinamică. În special termodinamica stărilor de neechilibru sau a proceselor ireversibile este cu deosebit succes folosită la studiul celor mai generale procese cinetice.

Prin folosirea unor principii variaţionale termodinamice, ca principiul minimului ratei de producere a entropiei [G—1], [G—2], [K—1] sau cel al persistenţei maxime [H—1], [H—2], [K—1], la procesele neutronice, considerate ca procese ireversibile, s-a putut deduce faptul remarcabil al echivalenţei dintre teoria transportului neutronilor şi teoria termodinamică a proceselor ireversibile. De asemenea au putut fi tratate în mod foarte natural probleme legate de starea staţionară sau nestaţionară a reactorului, şi în special cele legate de fluctuaţii şi de efectele neutronilor întîrziaţi [H -2].

Întrucît la baza studiului termodinamic al acestor procese se găseşte principiul de reciprocitate al lui Onsager, este de aşteptat ca şi în teoria transportului neutronilor el să aibă aplicaţii fecunde.

Un alt aspect termodinamic, cel al maximizării entropiei printr-o metodă variaţională, conduce la analogii şi legături remarcabile cu teo-

Scanned with OKEN Scanner

ria informației [H—3], [I—1]. Ea permite deducerea ecuației Boltzmann din ecuația mult mai generală a lui Liouville din mecanica statistică și determinarea scăderii cantității de informație pe care o implică această deducere.

Spre deosebire de marea majoritate a metodelor de aproximare folosite în teoria transportului neutronilor, în care problemele legate de multiplicarea și de difuzia neutronilor, de termalizarea și de cinetica lor sînt tratate separat, în tratarea termodinamică mărimile care caracterizează aceste procese sînt deduse în mod natural prin relații de interdependență remarcabile.

Pot fi tratate mult mai ușor problemele care includ discontinuități și gradienți de temperatură, precum și numeroase alte probleme întîlnite des în practică, în special la centralele nucleare și la reactorii speciali de cercetare (pulsați, de fluxuri intense etc.).

Se deduc mai simplu decît prin metodele clasice mărimi importante în fizica reactorilor nucleari, ca temperatura efectivă a „gazului" de neutroni, coeficienții de difuzie și de conductibilitate termică, parametrii cinetici și de fluctuații, expresii noi ale distribuțiilor neutronice și ale coeficienților de difuzie în funcție de parametrii termodinamici ai mediului etc.

Aceste deosebite avantaje ale tratării termodinamice a transportului neutronilor se datoresc atît generalizării pe care o conferă rezultatelor obținute, cît și faptului că permit tratarea simultană a unui cuplu de fenomene de transport intim legate în cazul reactorilor nucleari, cum sînt transferul căldurii și transportul neutronilor.

Cunoscută de aproape un secol în fizică, dar descoperită și pusă în valoare în fizica reactorilor nucleari abia din 1958, teoria termodinamică a cunoscut în scurt timp numeroase formulări:

— în stabilirea echivalenței teoriei transportului neutronilor cu teoria termodinamică a proceselor inversibile [G—2] prin regăsirea în cadrul primei a principiului minimului ratei de producere a entropiei, caracteristic teoriei termodinamice;

— în deducerea ecuației transportului neutronilor din principiul termodinamic al persistenței maxime [H—1];

— în studiul comportării termodinamice a reactorilor nucleari [F—1];

— în determinarea distribuțiilor neutronice și de temperaturi din același principiu termodinamic [G—1], [K—1] sau din principiul termodinamic al lui Onsager [V—1];

— în stabilirea legăturilor dintre parametrii de termalizare a neutronilor și cei cinetici și de fluctuații ai reactorilor [G—1], [G—3]

— în studiul termalizării și difuziei neutronilor, pe baza calculului ratei de producere a entropiei [G—1] [K—4], sau prin folosirea metodei de dezvoltare Chapman—Enskog [G—1].

Scanned with OKEN Scanner

În paragrafele următoare vor fi prezentate cîteva dintre formulările termodinamice care conduc la evaluarea unor mărimi de interes major în fizica reactorilor.

5.1. Echivalența teoriei transportului și a teoriei termodinamice a proceselor ireversibile

Numeroase procese cinetice, printre care transportul neutronilor deține un rol central, pot fi tratate atît prin teoria transportului liniar, cît și prin termodinamica stărilor nestaționare. Întrucît același proces fizic poate fi tratat prin două teorii fundamental diferite, este de așteptat să existe o legătură între aceste teorii, a cărei deducere să permită evidențierea unor aspecte cu totul noi ale procesului sau aspecte cunoscute, dar care nu erau suficient de bine stăpînite în fiecare teorie separat.

Pentru deducerea acestei legături se pornește [G—2] de la ecuația liniară de transport și se obține un principiu variațional echivalent cu principiul termodinamic al minimului ratei de producție a entropiei.

Acest principiu postulează că starea staționară a unui sistem în care are loc un proces ireversibil este acea stare pentru care rata de producție a entropiei are o valoare minimă față de constrîngerile ce opresc sistemul de a ajunge la echilibru.

Considerînd că mediul în care are loc transportul neutronilor se găsește în echilibru termodinamic la temperatura constantă T, că el este omogen și izotrop, adică $G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})$ nu depinde de coordonata spațială $\mathbf{x}$ și, respectiv, depinde doar de $\left(\frac{\mathbf{v}'}{v} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v'}\right)$ unde $G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})$ reprezintă probabilitatea ca neutronii de viteză $\mathbf{v}$ să ajungă prin împrăștieri la viteza finală $\mathbf{v}'$, putem scrie ecuația de transport pentru densitatea de neutron

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\mathbf{v}\nabla N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \int [N(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)\, G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})]\, \mathrm{d}^3v' - [a(v) + g(v)]\, N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \tag{5.1}$$

Pentru a o aduce la o formă convenabilă scopului propus, se înmulțește această ecuație cu $\log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ (întrucît, după cum vom vedea, expresia entropiei sistemului de N particule conține acest logaritm) și se integrează pe $\mathbf{v}$, obținîndu-se

$$\int \mathrm{d}^3v \log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial t} N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\int \mathrm{d}^3v \log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathbf{v} \nabla N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \int \mathrm{d}^3v \int \mathrm{d}^3v' \log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) - \int \mathrm{d}^3v\, [a(v) + g(v)] \log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \tag{5.2}$$

Folosind apoi primii doi termeni din dezvoltarea în armonici sferice a densității neutronilor (deci aproximația P_1),

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = N(\mathbf{x}, v, t)\,[1 + 3\,\mathbf{e}\,\Phi(\mathbf{x}, v, t)],\ \mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{5.3}$$

și notațiile

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}, v, t) &= \frac{n(\mathbf{x}, v, t)}{4\,\pi v^2}, \\ n(\mathbf{x}, v, t)\,\Phi(\mathbf{x}, v, t) &= q(\mathbf{x}, v, t), \\ m(v) &= 4\,\pi v^2 M(v), \\ g(v' \to v) &= \int G(v' \to v)\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')\,v^2\,d\mathbf{e}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

se poate transforma ecuația inițială de transport în

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, v, t)}{\partial t} = -\,v \nabla q(\mathbf{x}, v, t) + \int g(\mathbf{v}' - \mathbf{v})\,n(\mathbf{x}, v', t)\,d^3v' - \\ - [a(v) + g(v)]\,n(\mathbf{x}, v, t), \tag{5.5}$$

după înmulțirea ei cu v^2 și integrarea pe $\mathbf{e}$.

În aproximația împrăștierii izotrope, cînd $G(v' \to v, \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')$ nu mai depinde de $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')$, această ecuație se reduce la

$$\frac{\partial\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t)}{\partial t} = -\frac{1}{3}\,v \nabla n(\mathbf{x}, v, t) - [a(v) + g(v)]\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t). \tag{5.6}$$

Folosind cele două expresii (5.5) și (5.6), precum și

$$\log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \approx \log N(\mathbf{x}, v, t) + 3\,\mathbf{e}\,\frac{q(\mathbf{x}, v, t)}{4\,\pi v^2}$$

$$3\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t) \ll n(\mathbf{x}, v, t) \tag{5.7}$$

în ecuația (5.2), se obține

$$\int \log N(\mathbf{x}, v, t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,n(\mathbf{x}, v, t)\,d\mathbf{v} = -\nabla \int \log N(\mathbf{x}, v, t)\;v\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t)\,d\mathbf{v} + \\ + \int \nabla [\log N(\mathbf{x}, v, t)]\,v\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t)\,d\mathbf{v} + \int dv \int \log N(\mathbf{x}, v, t)\,[n(\mathbf{x}, v', t)\,g(v' \to v) - \\ - n(\mathbf{x}, v, t)\,g(v \to v')]\,dv' - \int \log N(\mathbf{x}, v, t)\,a(v)\,n(\mathbf{x}, v, t)\,d\mathbf{v}. \tag{5.8}$$

Din teoria termodinamică se știe însă că entropia unui sistem N de particule este dată de

$$S_1(\mathbf{x}, t) = -k \int N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) [\log N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - 1] \, d^3v, \tag{5.9}$$

iar ecuația bilanțului entropiei sistemului este

$$\frac{\partial S_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_{s1}(\mathbf{x}, t) + \sigma_1(\mathbf{x}, t), \tag{5.10}$$

în care σ_1 este rata de producție a entropiei, iar $\mathbf{J}_{s1}$ curentul de entropie al sistemului.

Comparînd ecuațiile (5.10) și (5.8), se obțin expresiile entropiei S_1, ratei de producere a entropiei σ_1 și curentului de entropie $\mathbf{J}_{s1}$ deduse din ecuația de transport. Aceste identificări nu constituie încă o demonstrare a echivalenței celor două teorii (de transport și termodinamică), dar ele permit deducerea faptului remarcabil că expresia obținută mai sus din teoria transportului pentru rata de producție a entropiei σ_1 satisface condiția variațională $\delta \int \sigma(\mathbf{x}, t) \, d^3v = 0$, după care mărimea $\int \sigma(\mathbf{x}, t) \, d^3 v$ ia o valoare extremă (un minim, după cum se va demonstra) pentru stările staționare. Această condiție nu este însă altceva decît principiul termodinamic al minimului ratei de producție al entropiei.

În acest scop vom transforma din nou ecuația de transport (5.1) prin introducerea notațiilor

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \frac{N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\sqrt{M(v)}}, \\ B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= \sqrt{\frac{M(v')}{M(v)}} G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}), \\ M(v) &= \left(\frac{1}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{v^2}{2kT_0}} = \text{distribuția maxwelliană} \end{aligned} \tag{5.11}$$

și prin folosirea principiului bilanțului detaliat

$$\begin{aligned} M(v) G(\mathbf{v} \to \mathbf{v}') &= M(v') G(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}), \\ B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') &= B(\mathbf{v}', \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{5.12}$$

care conduc la ecuația

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = &-\mathbf{v} \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \int H(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \, d^3v - \\ &- [a(v) + g(v)] H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

După multiplicarea cu $H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ și integrarea pe $\mathbf{v}$, aceasta devine

$$\int H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial t} H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathrm{d}^3 v = -\int v\, H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathrm{d}^3 v +$$

$$+ \int \mathrm{d}^3 v \int H(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, H(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)\, B(\mathbf{v}, \mathbf{v}')\, \mathrm{d}^3 v' - \int [a(v) + g(v)] H^2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathrm{d}^3 v, \tag{5.14}$$

iar după folosirea aproximației P_1 a densității neutronilor (5.3) și a unor transformări analoge cu cele precedente (5.4—5.8) se obține

$$\int \frac{N(\mathbf{x}, v, t)}{M(v)} \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{x}, v, t)\, \mathrm{d}v = \int \left[\frac{N(\mathbf{x}, v, t)}{M(v)} \left(- v \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t) \right) \right] \mathrm{d}v + \tag{5.15}$$

$$+ \int \mathrm{d}v \int \frac{N(\mathbf{x}, v, t)}{\sqrt{M(v)}} \frac{n(\mathbf{x}, v', t)}{\sqrt{M(v')}} b(v, v') - \int \frac{N(\mathbf{x}, v, t)}{M(v)} [a(v) + g(v)] n(\mathbf{x}, v, t)\, \mathrm{d}v,$$

unde

$$b(v, v') = \sqrt{\frac{M(v')}{M(v)}}\, g(v' \to v).$$

Dacă membrul drept al acestei ecuații se notează cu $R_0(\mathbf{x}, t)$ și dacă se folosește doar primul termen din dezvoltarea Taylor a densității $n(\mathbf{x}, v, t')$ în punctul $t = t'$,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t) = \frac{v}{3\,[a(v) + q(v)]} \nabla n(\mathbf{x}, v, t), \tag{5.16}$$

ecuația (5.15) devine

$$\delta \int \nu_0(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}^3 x = 2 \int \mathrm{d}^3 x \int \frac{\delta n(\mathbf{x}, v, t)}{4 \pi v^2 \sqrt{M(v)}}\, \mathrm{d}v \times \tag{5.17}$$

$$\left[- v \frac{1}{\sqrt{M(v)}} \nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}, v, t) + \int \frac{n(\mathbf{x}, v', t)}{\sqrt{M(v')}} b(v, v')\, \mathrm{d}v' - [a(v) + g(v)] \frac{n(\mathbf{x}, v, t)}{\sqrt{M(v)}} \right].$$

Expresia din paranteza pătrată se anulează pentru stările staționare conform ecuației (5.5), conducînd la condiția variațională căutată, de minim al ratei de producție a entropiei:

$$\delta \int R_0(\mathbf{x})\, \mathrm{d}^3 x = 0 \tag{5.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, sub formă dezvoltată,

$$\delta \int \nu_0 (\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}^3 x = \delta \int \mathrm{d}^3 x \int \mathrm{d}v \left\{ \nabla \left(\frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)} v\, \mathbf{q} (\mathbf{x}, v, t) + \right.\right.$$

$$+ \int \mathrm{d}v \int \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)} [n (\mathbf{x}, v', t)\, g (v' \to v) - n (\mathbf{x}, v, t)\, g (v \to v')]\, \mathrm{d}v' - \qquad (5.19)$$

$$\left. - \int \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)}\, a (v)\, n (\mathbf{x}, v, t)\, \mathrm{d}v \right\}.$$

Şi ecuaţia (5.15), rescrisă sub forma

$$\int \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)} \frac{\partial}{\partial t} n (\mathbf{x}, v, t)\, \mathrm{d}v = \int \mathrm{d}v \nabla \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)} v\, \mathbf{q} (\mathbf{x}, v, t) +$$

$$+ \int \mathrm{d}v \int \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)} [n (\mathbf{x}, v', t)\, g (v' \to v) - n (\mathbf{x}, v, t)\, g (v \to v')]\, \mathrm{d}v' - \qquad (5.20)$$

$$- \int \frac{N (\mathbf{x}, v, t)}{M (v)}\, a (v)\, n (\mathbf{x}, v, t)\, \mathrm{d}v,$$

reprezintă, prin analogia ei cu ecuaţia (5.8) şi (5.10) (după împărţirea cu N_0), chiar ecuaţia bilanţului entropiei (pînă la mărimi de ordin λ^2).

Pînă acum am tratat problema mai mult din punctul de vedere al teoriei transportului, identificînd cu ajutorul ei unele expresii termodinamice.

Vom aprofunda în continuare diversele aspecte ale transportului neutronilor din punctul de vedere al teoriei termodinamice. În acest scop este necesar ca în expresia ratei de producţie a entropiei σ să deosebim componenta corespunzătoare neutronilor σ_1, de cea corespunzătoare mediului σ_0:

$$\sigma (\mathbf{x}, t) = \sigma_0 (\mathbf{x}, t) + \sigma_1 (\mathbf{x}, t), \qquad (5.21)$$

unde

$$\sigma_0 (\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{T_0} \frac{\mathrm{d}_i E}{\mathrm{d}t} + \frac{\eta_0}{T_0} \frac{\mathrm{d}_i n}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{T_0} \frac{\mathrm{d}_i Q}{\mathrm{d}t},$$

$$\sigma_1 (\mathbf{x}, t) = \nabla \left(\frac{1}{T (\mathbf{x}, t)} \right) \mathbf{I}_Q - \frac{\nabla N (\mathbf{x}, t)}{N (\mathbf{x}, t)} k\, \mathbf{I}_n + \frac{1}{T (\mathbf{x}, t)} \frac{\mathrm{d}_i E}{\mathrm{d}t} -$$

$$- \frac{\eta (\mathbf{x}, t)}{T (\mathbf{x}, t)} \frac{\mathrm{d}_i n}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T (x, t)} \frac{\mathrm{d}_i Q}{\mathrm{d}t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$\mathbf{I}_n$ — curentul de neutroni,

$\mathbf{I}_q$ — curentul caloric (de energie),

$\frac{\mathrm{d}_i E}{\mathrm{d}t}$ — variația energiei neutronilor în urma interacțiunii cu mediul,

$\frac{\mathrm{d}_i n}{\mathrm{d}t}$ — variația numărului de neutroni în urma absorbțiilor,

$\frac{\mathrm{d}_i Q}{\mathrm{d}t}$ — variația energiei neutronilor în urma absorbțiilor,

η — potențialul chimic al „gazului" neutronic.

Dacă ar fi posibilă deducerea unei expresii $\varepsilon(\mathbf{x}, v, t)$ care să permită identificarea ratei de producție a entropiei date de teoria termodinamică (5.21) cu cea dedusă din teoria transportului (5.20), am fi în posesiunea unei metode directe de a demonstra echivalența celor două teorii în cazul transportului neutronilor.

O astfel de expresie a fost dedusă de Kazarnovski [K—2], sub forma

$$\varepsilon(\mathbf{x}, v, t) = \xi_0(\mathbf{x}, t)\, L_0^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) + \xi_1(\mathbf{x}, t)\, L_1^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right), \tag{5.22}$$

unde $L_0^{1/2}(x)$ sînt polinoame Laguerre de ordin semiîntreg,

$$L_0^{1/2}(x) = 1\,;\; L_1^{1/2}(x) = \frac{3}{2} - x, \tag{5.23}$$

iar funcțiile ξ_i au sensurile fizice corespunzătoare:

$$\begin{aligned} \xi_0(\mathbf{x}, t) &= \frac{N(\mathbf{x}, t) - N_0}{N_0}, \\ N(\mathbf{x}, t) &= \int N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathrm{d}^3 v, \\ \xi_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{T(\mathbf{x}, t) - T_0}{T_0}, \\ \frac{3}{2} kT(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2N(\mathbf{x}, t)} \int v^2 N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, \mathrm{d}^3 v. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Expresia (5.22) sub forma generalizată a unei dezvoltări în serie

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\mathbf{x}, t)\, L_i^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) \tag{5.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

a mai fost folosită cu succes [K—2] la rezolvarea însăși a ecuației de transport al neutronilor.

Folosind în ecuația (5.20) notațiile

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int v\, \mathrm{q}\,(\mathrm{x}, v, t)\, \mathrm{d}v, \\
I_1 &= \int L_1^{1/2}\left(\frac{v^2}{2\,kT_0}\right) v\, \mathrm{q}\,(\mathrm{x}, v, t)\, \mathrm{d}v, \\
\mathcal{J}_0 &= 0, \\
\mathcal{J}_1 &= \int L_1^{1/2}\left(\frac{v^2}{2\,kT_0}\right) \mathrm{d}v \left[\int (n\,(\mathrm{x}, v', t)\, g\,(v' \to v) - n\,(\mathrm{x}, v, t)\, g\,(v \to v'))\, \mathrm{d}v', \right. \\
\mathcal{J}_{a_0} &= \int a\,(v)\, n\,(\mathrm{x}, v, t)\, \mathrm{d}v, \\
\mathcal{J}_{a_1} &= \int a\,(v)\, L_1^{1/2}\left(\frac{v^2}{2\,kT_0}\right) n\,(\mathrm{x}, v, t)\, \mathrm{d}v,
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

iar în expresia (5.21) a ratei de producție a entropiei dezvoltări de forma

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T\,(\mathrm{x}, t)} &= \frac{1}{T_0}\left[1 - \frac{T\,(\mathrm{x}, t) - T_0}{T_0}\right], \\
\frac{\mu\,(\mathrm{x}, t)}{T\,(\mathrm{x}, t)} &= \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\mu}{T}\right)_{T,V} (N - N_0) + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu}{T}\right)_{N,V} (T - T_0),
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

care o transformă în

$$
\sigma^{TNE} = -\frac{\nabla T\,(\mathrm{x}, t)}{T_0^2}\, \mathbf{I}_Q - \frac{\nabla N\,(\mathrm{x}, t)}{N_0}\, k\, \mathbf{I}_n - \frac{T\,(\mathrm{x}, t) - T_0}{T_0^2}\, \frac{\mathrm{d}_i E}{\mathrm{d}t} -
$$

$$
- \frac{N\,(\mathrm{x}, t) - N_0}{N_0}\, k\, \frac{\mathrm{d}_i n}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{2}\, \frac{T\,(\mathrm{x}, t) - T_0}{T_0}\, k\, \frac{\mathrm{d}_i n}{\mathrm{d}t}\, \frac{T\,(\mathrm{x}, t) - T_0}{T_0}\, \frac{\mathrm{d}_i Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.28}
$$

(TNE = valoarea în termodinamica stărilor de neechilibru), se obține echivalența celor două teorii sub forma

$$
\begin{aligned}
\sigma = -k \{ & \mathbf{I}_0\,(\mathrm{x}, t)\, \nabla \xi_0\,(\mathrm{x}, t) + \mathbf{I}_1\, \nabla \xi_1\,(\mathrm{x}, t) + \xi_1\,(\mathrm{x}, t)\, \mathcal{J}_1\,(\mathrm{x}, t) - \\
& - \xi_0\,(\mathrm{x}, t)\, \mathcal{J}_{a_0}\,(\mathrm{x}, t) - \xi_1\,(\mathrm{x}, t)\, \mathcal{J}_{a_1}\,(\mathrm{x}, t)\}.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Scanned with OKEN Scanner

Dependența liniară dintre curenții și forțele termodinamice, exprimată prin principiul de reciprocitate al lui Onsager,

$$\begin{aligned} I_0 &= L_{00} \nabla \xi_0 (\mathbf{x}, t) + L_{01} \nabla \xi_1 (\mathbf{x}, t), \\ I_1 &= L_{01} \nabla \xi_0 (\mathbf{x}, t) + L_{11} \nabla \xi_1 (\mathbf{x}, t), \\ \mathcal{J}_1 &= l_{11} \xi_1 (\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{5.30}$$

se verifică și în aproximația de transport, în care coeficienții cinetici a lui Onsager, L_{ik}, se exprimă prin relațiile

$$L_{ik} = -\frac{1}{3} N_0 \int \mathrm{d}v\, \gamma (v)\, m (v)\, L_i^{1/2} \left(\frac{v^2}{2 kT_0}\right) L_k^{1/2} \left(\frac{v^2}{2 kT_0}\right),$$

$$\gamma (v) = \frac{v^2}{a(v) + g(v)} \; ; \; i, k = 0,1, \tag{5.31}$$

$$l_{ik} = N_0 \int \mathrm{d}v\, L_i^{1/2} \left(\frac{v^2}{2 kT_0}\right) \int \mathrm{d}v' \left[m (v')\, L_k^{1/2} \left(\frac{v'^2}{2 kT_0}\right) g (v' \to v) - \right.$$

$$\left. - m (v)\, L_k^{1/2} \left(\frac{v^2}{2 kT_0}\right) g (v \to v') \right], \quad i, k = 1.$$

Ca o dovadă a profundelor legături care există între cele două formulări (termodinamică și de transport) stă și faptul că, folosind dezvoltarea generalizată (5.25) în ecuația (5.1), rescrisă sub forma

$$\nu (\mathbf{x}) = \int v\, \mathbf{q} (\mathbf{x}, v) \nabla \left(\frac{N (\mathbf{x}, v)}{M (v)}\right) \mathrm{d}v +$$

$$+ \int \mathrm{d}v \int \frac{N (\mathbf{x}, v)}{M (v)} [n (\mathbf{x}, v')\, g (v' \to v) - n (\mathbf{x}, v)\, g (v \to v')] - \tag{5.32}$$

$$- \int \frac{N (\mathbf{x}, v)}{M (v)} n (\mathbf{x}, v)\, a (v)\, \mathrm{d}v + 2 \int \frac{N (\mathbf{x}, v)}{M (v)} r (\mathbf{x}, v)\, \mathrm{d}v,$$

unde

$$r (\mathbf{x}, v) = 4 \pi v^2 S (\mathbf{x}, v),$$

Scanned with OKEN Scanner

în care a fost luată în considerare și prezența unei surse $S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, se obțin ecuațiile

$$-L\nabla^2\xi(\mathbf{x}) + (l - \lambda)\,\xi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}),$$

$$\xi(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \xi_0(\mathbf{x}) \\ \xi_1(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla^2\xi(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \nabla^2\xi_0(\mathbf{x}) \\ \nabla^2\xi_1(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \tag{5.33}$$

$$\rho(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} \int r(\mathbf{x}, v)\, L_0^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) dv \\ \int r(\mathbf{x}, v)\, L_1^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) dv \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{bmatrix}; \; L_{ik} \text{ și } l_{ik} \text{ sînt dați de (5.31)},$$

$$\lambda_{ik} \equiv N_0 \int a(v)\, m(v)\, L_i^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) L_k^{1/2}\left(\frac{v^2}{2kT_0}\right) dv,$$

care în aproximația de difuzie $\left[\Sigma_a(v) \sim \frac{1}{v}\right]$ se reduc la

$$-\nabla\xi(\mathbf{x}) + (L^{-1}l - L^{-1}\lambda)\,\xi(\mathbf{x}) = L^{-1}\rho(x), \tag{5.34}$$

adică la binecunoscuta ecuație de difuzie a neutronilor.

5.2. Teoria transportului și principiul persistenței maxime

Deși valabilitatea principiului termodinamic variațional (al minimalității ratei de producție a entropiei), folosit la deducerea echivalenței termodinamicii proceselor ireversibile cu teoria transportului neutronilor în reactorii nucleari, este limitată de condiția ca starea staționară să fie apropiată de starea de echilibru a sistemului, rezultatele utilizării lui, atît teoretice, cît mai ales practice (vezi paragrafele următoare), au întrecut așteptările.

Cu atît mai îndreptățiți vom fi să ne așteptăm la rezultate valoroase de la aplicarea unui principiu termodinamic variațional mai general, ca cel al persistenței maxime, care a fost abordat recent [H—1],

[H—2] în legătură cu teoria transportului neutronilor și care nu cunoaște această limitare.

Generalitatea sa mai largă se datorește faptului că se poate aplica și stărilor reactorului neapropiate de cele de echilibru, deci și proceselor neliniare.

Cu alte cuvinte, problema importantă a fizicii reactorului de determinare a variabilei de stare care devine un extrem cînd se atinge o stare staționară și care nu poate fi rezolvată corect de principiul minimului ratei de producție a entropiei decît în condițiile restrictive de liniaritate a proceselor abordate și de valabilitate a relațiilor de reciprocitate ale lui Onsager (ale căror coeficienți trebuie să fie constanți) este rezolvată cu succes de principiul persistenței maxime, care nu cunoaște aceste limitări.

În acest scop, noul principiu se bazează pe metoda „probabilității de drum", adică a probabilității „traiectoriei" pe care o urmează evoluția dinamică statistică a unui sistem markovian cu care este echivalat transportul neutronilor.

Persistența, care este o mărime variațională și o proprietate macroscopică a unui sistem fizic, reprezintă probabilitatea ca o anumită stare (staționară sau nu) a sistemului să persiste fără variații de-a lungul unui interval scurt de timp și se deduce din probabilitatea de drum a procesului.

Principiul amintit afirmă că persistența unui sistem markovian este maximă în cazul unei stări staționare și permite deducerea ecuațiilor care furnizează condițiile de realizare a stărilor staționare.

Înainte de a aplica acest principiu problemelor de transport neutronic mai sînt necesare cîteva precizări în legătură cu definiția persistenței.

În acest scop se consideră ansamblul (de exemplu reactorul) compus din L_i sisteme ($i = 1, 2, \ldots$ arbitrar). O stare a ansamblului la momentul t este reprezentat de un sistem de probabilități $p_i(t)$ cu ajutorul cărora numărul de sisteme din ansamblu, care se găsesc în starea i, se exprimă simplu prin produsul $L \cdot p_i(t)$. În cursul procesului r care are loc în acest ansamblu, starea i poate trece în starea j într-un interval mic de timp τ; $(t \to t + \tau)$, trecerea fiind caracterizată de sistemul de parametri $P_{iir}(t;\ t + \tau)$ (tot probabilități).

Numărul sistemelor care la momentul t se găsesc în starea i, iar în momentul $(t + \tau)$ se găsesc în starea j prin intermediul procesului r va fi dat tot de un produs de forma $L \cdot P_{iir}(t;\ t + \tau)$.

O analiză mai atentă a definițiilor lui $p_i(t)$ și P_{iir} conduce la următoarele relații de compatibilitate remarcabile:

$$p_i(t) = \sum_j \sum_r P_{iir}(t;\ t + \tau),$$

$$p_j(t + \tau) = \sum_i \sum_r P_{iir}(t;\ t + \tau). \tag{5.35}$$

Întrucît probabilitățile $p_i(t)$ caracterizează stările, vor fi numite parametri de stare, în timp ce probabilitățile $P_{ij,\tau}$, care caracterizează tranzițiile dintre stări, vor fi numite parametri de drum.

Cu aceste noțiuni se definește o funcție variațională, numită persistență, care reprezintă o probabilitate condițională de tranziție (probabilitate de drum) de la o stare la momentul t la aceeași stare la momentul $(t + \tau)$, ambele definite de aceleași probabilități de stare $p_i(t)$ și $p_i(t + \tau)$.

Această probabilitate a unui sistem de a persista într-o stare este maximă (persistența maximă), adică ansamblul are o stare staționară.

Pentru extinderea acestui principiu la teoria transportului neutronilor, ne mărginim la aproximația monogrupală și deosebim cele trei procese fundamentale: de împrăștiere (sc), fisiune (fis) și absorbție (a).

Notînd cu $\Phi(r, \Omega, t)$ distribuția unghiulară a neutronilor la momentul t, numărul de neutroni care în intervalul mic de timp $\Delta t = t + \tau$ trec de la elementul de volum $(d\omega_r\, d\omega_\Omega)$ din jurul lui (r, Ω) la $(d\omega_{r'}\, d\omega_{\Omega'})$ din jurul lui (r', Ω') și suferă pe acest drum un proces de împrăștiere este dat de probabilitatea acestui proces pe drumul respectiv, adică de parametrul de drum

$$P_{sc}(r, \Omega; r'; \Omega')\, d\omega_r\, d\omega_\Omega\, d\omega_{r'}\, d\omega_{\Omega'}. \tag{5.36}$$

Intervalul Δt este considerat astfel încît procesele de împrăștiere multiplă să fie neglijabile (această probabilitate are deci caracterul unei probabilități de primă ciocnire).

Se definesc cu totul analog parametrii de drum pentru fisiune, pentru absorbție și, respectiv, pentru lipsa acestor procese:

$$\begin{aligned} &P_{fis}(r, \Omega; r', \nu)\, d\omega_r\, d\omega_\Omega\, d\omega_{r'}, \\ &P_a(r, \Omega)\, d\omega_r\, d\omega_\Omega, \\ &P(r, \Omega)\, d\omega_r\, d\omega_\Omega, \end{aligned} \tag{5.37}$$

în care ν reprezintă numărul de noi neutroni produși în $d\omega_r$ prin fisiuni în $d\omega_r\, d\omega_\Omega$.

Probabilitățile acestor procese vor fi notate prin

$$\mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega');\quad \mathfrak{Q}_{fis}(r, \Omega, \nu);\quad \mathfrak{Q}_a(r, \Omega)$$

și

$$\mathfrak{Q}(r, \Omega) = 1 - [\mathfrak{Q}_{sc}\, d\omega_{\Omega'} + \sum_\nu \mathfrak{Q}_{fis} + P_a]. \tag{5.38}$$

Considerînd că numărul de sisteme L_i reprezintă în cazul reactorului numărul neutronilor la momentul t și notînd $d\omega = d\omega_r\, d\omega_\Omega$, se

Scanned with OKEN Scanner

obține pentru logaritmul probabilității de drum G (deci a persistenței)

$$\frac{1}{L}\log G^{l}(P)=\Big[\int\Phi\log\Phi\,\mathrm{d}\omega-\int P\log P\,\mathrm{d}\omega-\int P_{sc}\log P_{sc}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'-$$

$$-\sum_{\nu}\int P_{fis}\log P_{fis}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega_{r'}-\int P_{a}\log P_{a}\,\mathrm{d}\omega+\int P\log\mathfrak{L}\,\mathrm{d}\omega+ \tag{5.39}$$

$$+\int P_{sc}\log\mathfrak{L}_{sc}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'+\sum_{\nu}\int P_{fis}\log\mathfrak{L}_{fis}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega_{r'}+\int P_{a}\log\mathfrak{L}_{a}\,\mathrm{d}\omega\Big].$$

Pentru a determina persistența stării din această ecuație este necesară o explicitare a expresiilor pentru diversele probabilități de drum care intră în ea și o formulare a distribuției unghiulare a neutronilor în funcție de aceleași probabilități.

Considerînd că la momentul t și în continuare neutronii se mișcă neperturbați și cu viteza v, iar la momentul $(t+\tau)$ ei provoacă unul dintre cele patru procese amintite (P_{sc}, P_{fis}, P_{a}, P), avem relațiile

$$\begin{aligned}P_{sc}(r,\Omega;r',\Omega')&=P_{sc}(r,\Omega,\Omega')\,\delta(r'-r-v\Omega\tau),\\ P_{fis}(r,\Omega;r',\nu)&=P_{fis}(r,\Omega,\nu)\,\delta(r'-r-v\Omega\tau),\end{aligned} \tag{5.40}$$

în funcție de care distribuția unghiulară a neutronilor la cele două momente este

$$\Phi(r,\Omega,t)=P(r,\Omega)+\int P_{sc}(r,\Omega,\Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}+\sum_{\nu}P_{fis}(r,\Omega,\nu)+P_{a}(r,\Omega), \tag{5.41}$$

$$\Phi(r,\Omega,t+\tau)=P(r-v\Omega\tau,\Omega)+\int P_{sc}(r-v\Omega'\tau,\Omega',\Omega)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}+$$

$$+\sum_{\nu}\frac{\nu}{4\pi}\int P_{fis}(r-v\Omega'\tau,\Omega',\nu)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}.$$

Din cele două expresii se deduce variația distribuției unghiulare între cele două stări, iar problema esențială este determinarea condițiilor cinetice în care persistența definită de această variație este maximă.

Variația este dată de

$$\Phi(r+v\Omega\tau,\Omega,t+\tau)-\Phi(r,\Omega,t)=\int P_{sc}(r+v(\Omega-\Omega')\tau,\Omega',\Omega)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}-$$

$$-\int P_{sc}(r,\Omega,\Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}+\frac{1}{4\pi}\sum_{\nu}\nu\int P_{fis}(r+v(\Omega-\Omega')\tau,\Omega',\nu)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'}-$$

$$-\sum_{\nu}P_{fis}(r,\Omega,\nu)-P_{a}(r,\Omega). \tag{5.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd aceste expresii explicitate de (5.38), (5.40), (5.41) în (5.39), se obține pentru persistența G^I (probabilitatea procesului pe primul drum)

$$\frac{1}{L}\log G^{'}(P) = \int \Phi(r,\ \Omega)\log \Phi(r,\ \Omega)\,\mathrm{d}\omega_r\,\mathrm{d}\omega_\Omega -$$

$$-\int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\log P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega\mathrm{d}\omega_{\Omega'} -$$

$$-\sum_\nu \int P_{fis}(r,\Omega,\ \nu)\log P_{fis}(r,\Omega,\ \nu)\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega - \int P_a(r,\Omega)\log P_a(r,\Omega)\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega -$$

$$-\int\int\Big\{\Big[p(r,\ \Omega) - \int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} - \sum_\nu P_{fis}(r,\ \Omega,\ \nu) -$$

$$-P_a(r,\Omega)\Big]\log\Big[p(r,\ \Omega) - \int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\Big]\Big\}\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} - \sum_\nu P_{fis}(r,\ \Omega,\ \nu) -$$

$$-P_a(r,\ \Omega)\Big]\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega + \int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\log \mathfrak{A}_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega\mathrm{d}\omega_{\Omega'} +$$

$$+\sum_\nu \int P_{fis}(r,\Omega,\ \nu)\log \mathfrak{A}_{fis}(r,\Omega,\ \nu)\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega + \int P_a(r,\Omega)\log \mathfrak{A}_a(r,\Omega)\,\mathrm{d}\omega_r\,\mathrm{d}\omega_\Omega +$$

$$+\int\Big[p\ (r,\ \Omega) - \int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} - \sum_\nu P_{fis}(r,\ \Omega,\ \nu) - P_a(r,\ \Omega)\Big]\log\Big[1 -$$

$$-\Big(\int \mathfrak{A}_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} + \sum_\nu \mathfrak{A}_{fis}(r,\ \Omega,\ \nu) + \mathfrak{A}_a(r,\ \Omega)\Big)\Big]\,\mathrm{d}\omega_r\mathrm{d}\omega_\Omega. \qquad (5.43)$$

Pentru a-i determina maximul, în raport cu o variație dată de stare, prin considerarea variațiilor independente ale parametrilor de drum, se rezolvă problema variațională

$$\delta\Big\{\log G^I(P) + \int \lambda(r,\ \Omega)\Big[p(r + v\ \Omega\,\Delta t,\ \Omega, t + \Delta t) - p\ (r,\ \Omega,\ t) -$$

$$-\int P_{sc}(r + v\ (\Omega - \Omega')\ \Delta t,\ \Omega',\ \Omega)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} + \int P_{sc}(r,\ \Omega,\ \Omega')\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_\nu \nu\int P_{sc}(r + v\ (\Omega - \Omega')\ \Delta t,\ \Omega',\ \nu)\,\mathrm{d}\omega_{\Omega'} +$$

$$+\sum_\nu P_{fis}(r,\ \Omega,\ \nu) + P_a(r,\ \Omega)\Big]\,\mathrm{d}\omega\Big\} = 0, \qquad (5.44)$$

unde $\lambda(r,\ \Omega)$ este multiplicatorul lagrangean.

Valorile extremale ale probabilităților de drum pentru variația luată în considerare rezultă din definițiile precedente și sînt date de

$$P_{sc}(r, \Omega, \Omega') = p(r, \Omega) \frac{\mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega')}{\mathfrak{Q}(r, \Omega)} e^{-\lambda(r, \Omega) - \lambda(r + v(\Omega - \Omega')\Delta t, \Omega')} \quad (5.45)$$

sau, deoarece

$$\mathfrak{Q}_{sc} \approx \Delta t; \quad \mathfrak{Q} \simeq 1 + 0(\Delta t); \quad P(r) = p(r, \Omega) + 0(\Delta t);$$
$$\lambda(r + v(\Omega - \Omega')\Delta t, \Omega') = \lambda(r, \Omega') + 0(\Delta t),$$

se reduc la

$$P_{sc}(r, \Omega, \Omega') = p(r, \Omega) \mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega') \exp[\lambda(r, \Omega) - \lambda(r, \Omega')], \quad (5.46)$$

$$P_{fis}(r, \Omega, \nu) = p(r, \Omega) \mathfrak{Q}_{fis}(r, \Omega, \nu) \exp\left[\lambda(r, \Omega) - \frac{\nu}{4\pi}\int \lambda(r, \Omega') \, d\omega_{\Omega'}\right], \quad (5.47)$$

$$P_a(r, \Omega) = p(r, \Omega) \mathfrak{Q}_a(r, \Omega) \exp[\lambda(r, \Omega)], \quad (5.48)$$

în timp ce valoarea multiplicatorului λ se deduce din

$$p(r + v\Omega\Delta t, \Omega, t + \Delta t) - p(r, \Omega, t) =$$
$$= \int p(r, \Omega') \mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega') \exp[\lambda(r, \Omega') - \lambda(r, \Omega)] \, d\omega_{\Omega'} -$$
$$- p(r, \Omega) \int \mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega') \exp[\lambda(r, \Omega) - \lambda(r, \Omega')] \, d\omega_{\Omega'} + \quad (5.49)$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu} \nu \int p(r, \Omega') \mathfrak{Q}_{fis}(r, \Omega', \nu) \exp\left[\lambda(r, \Omega') - \frac{\nu}{4\pi}\int \lambda(r, \Omega'') d\omega_{\Omega''}\right] d\omega_{\Omega'} -$$
$$- \sum_{\nu} p(r, \Omega) \mathfrak{Q}_{fis}(r, \Omega, \nu) \exp\left[\lambda(r, \Omega) - \frac{\nu}{4\pi}\int \lambda(r, \Omega') \, d\omega_{\Omega'}\right] -$$
$$- p(r, \Omega) \mathfrak{Q}_a(r, \Omega) \exp[\lambda(r, \Omega)].$$

Pentru determinarea valorii maxime a probabilității de drum pentru parametrii de stare dați, se ține seama de (5.46) și (5.48) în (5.43) și se obține final

$$\frac{1}{L} \log G^{II}(p(t + \Delta t), p(t)) = \int p(r, \Omega) \left\{ \mathfrak{Q}_{sc}(r, \Omega, \Omega') (\exp[\lambda(r, \Omega) - \right.$$
$$- \lambda(r, \Omega')] - 1) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu} \mathfrak{Q}_{fis}(r, \Omega, \nu) \left(\exp\left[\lambda(r, \Omega) - \frac{\nu}{4\pi}\int \lambda(r, \Omega'') \, d\omega_{\Omega''}\right] - \right.$$
$$\left. \left. - 1\right) + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{Q}_a(r, \Omega) (e^{\lambda(r, \Omega)} - 1) \right\} d\omega_r d\omega_{\Omega'} + \Delta t \int \lambda(r, \Omega) \left[v \operatorname{grad} p(r, \Omega) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial p}{\partial t}\right] d\omega_r d\omega_{\Omega}. \quad (5.50)$$

Aplicînd acest principiu al persistenței maxime la cazul reactorului nuclear în stare staționară pentru care parametrii de stare la momentele t și $t + \tau$ sînt egali,

$$\Phi(r, \Omega, t + \tau) = \Phi(r, \Omega, t), \tag{5.51}$$

se cercetează dacă persistența acestei stări

$$G^{II}\{[\Phi(t + \tau) = \Phi(t)]\,[\Phi(t)]\} = G^{III}(\Phi) \tag{5.52}$$

este maximă. În acest scop se dezvoltă ecuațiile (5.49) și (5.50) după λ și, după o serie de operații matematice (înmulțire cu $\lambda(r, \Omega)$, integrare și o transformare simplificatoare), se obține

$$\frac{1}{L}\log G^{III}(p) = -\frac{1}{2}\int p\left[\mathfrak{L}_{sc}(\lambda - \lambda')^2 + \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu}\mathfrak{L}_{fis}\left(\lambda - \frac{\nu}{4\pi}\int \lambda''\,d\omega_{\Omega''}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{L}_a\lambda^2\right] d\omega_r d\omega_{\Omega'} \tag{5.53}$$

unde s-a presupus $\mathfrak{L}_{sc}(\Omega, \Omega') = \mathfrak{L}_{sc}(\Omega', \Omega)$; $\mathfrak{L}_{fis} \neq f(\Omega)$ și s-a notat $\lambda' = \lambda(r, \Omega')$; $\Phi' = \Phi(r, \Omega')$.

Această expresie are un maxim evident pentru $\lambda = 0$, ceea ce conduce pentru fluxul unghiular de neutroni la expresia

$$\Omega\,\mathrm{grad}\,p + p(\Sigma_{sc} + \Sigma_{fis} + \Sigma_a) =$$

$$= \int p(r, \Omega')\left[\Sigma_{sc}(r, \Omega, \Omega') + \frac{\bar{\nu}}{4\pi}\Sigma_{fis}(r)\right] d\omega_{\Omega'} \tag{5.54}$$

unde

$$\Sigma_{sc}(r, \Omega, \Omega') = (v\,\Delta t)^{-1}\mathfrak{L}_{sc},$$

$$\Sigma_{sc}(r) = (v\Delta t)^{-1}\int \mathfrak{L}_{sc}\,d\omega_{\Omega},$$

$$\Sigma_{fis}(r) = (v\,\Delta t)^{-1}\sum_{\nu}\mathfrak{L}_{fis}, \tag{5.55}$$

$$\bar{\nu}\,\Sigma_{fis}(r) = (v\,\Delta t)^{-1}\sum_{\nu}\nu\,\mathfrak{L}_{fis},$$

$$\Sigma_a(r) = (v\Delta t)^{-1}\mathfrak{L}_a,$$

$\bar{\nu}$ = numărul mediu de neutroni per fisiune.

Dar ecuația (5.54), dedusă numai prin aplicarea principiului persistenței maxime, nu este alta decît „clasica" ecuație de transport al neutronilor.

Aceste considerente pot fi generalizate atît la aproximația multigrupală, cît și la studiul fluctuațiilor neutronice în reactor [H—2].

5.3. Distribuția spațio-energetică a neutronilor

Studiul acestei mărimi are o importanță deosebită în problemele de termalizare a neutronilor. Prin metodele clasice, ea este de obicei tratată separat pentru componenta spațială și pentru cea energetică.

Formularea termodinamică [G—1] a acestei probleme permite obținerea soluției cuplate pentru ambele componente și mai ales furnizează expresii care leagă parametrii de termalizare — ca temperatura și densitatea neutronilor — de cei cinetici: coeficienții de difuzie, de termodifuzie, de conductibilitate termică etc.

5.3.1. Mediu cu temperatură constantă

Folosind în ecuația de transport caracteristică acestei probleme o dezvoltare de tip Chapman—Enskog, se observă că rata de producție a entropiei procesului de termalizare σ_1 a neutronilor, obținută prin folosirea primilor doi termeni din dezvoltare, este identică cu aceeași mărime obținută din considerente pur termodinamice. Această identitate constituie o nouă demonstrare a echivalenței teoriei transportului neutronilor și a teoriei termodinamice a proceselor ireversibile.

Ecuația de transport folosită este

$$\frac{\partial n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \mathbf{v} \sum_a(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \\ + \int G\,(\mathbf{x}, \mathbf{v}' \to \mathbf{v})\, n(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)\, dv' - n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \int G(\mathbf{x}, \mathbf{v} \to \mathbf{v}')\, dv', \tag{5.56}$$

unde $G(\mathbf{x}, \mathbf{v} \to \mathbf{v}')$ este probabilitatea ca neutronii din $\mathbf{x}$ să sufere prin împrăștiere o variație de viteză (energie) de la $\mathbf{v}$ la $\mathbf{v}'$, iar $n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v}$ probabilitatea neutronilor de a se găsi în $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ la momentul t.

Această probabilitate este legată de densitatea neutronilor $n(\mathbf{x}, t)$ prin relația

$$\int n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, dv = n\,(\mathbf{x}, t). \tag{5.57}$$

În membrul drept al ecuației (5.56), primul termen — pe care îl vom nota $\mathcal{T}_a(n_1)$ — reprezintă absorbția neutronilor, în timp ce următorii doi termeni — pe care îi vom nota $\mathcal{T}_s(n_1)$ — reprezintă interacțiunea neutronilor cu moderatorul, presupus aici la o temperatură constantă.

Presupunînd că soluția este dată de o dezvoltare Chapman—Enskog de forma

$$n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n_0^T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, [1 + \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \Phi_2 \ldots] = \\ = n_1^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + n_1^1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \ldots, \tag{5.58}$$

în care primul termen reprezintă chiar distribuția maxwelliană locală cu o temperatură $T(\mathbf{x}, t)$ a neutronilor (considerați de masă $M = 1$):

$$n_0^T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{x}, t)\left[\frac{1}{2\pi k T(\mathbf{x}, t)}\right]^{3/2} \exp\left[-\frac{v^2}{2kT(\mathbf{x}, t)}\right]. \tag{5.59}$$

Unicitatea dezvoltării (5.58) este asigurată de condițiile

$$\int v^2 n_1^l(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = \int n_1^l(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = 0, \quad \text{pentru } l \geqslant 1, \tag{5.60}$$

care rezultă din expresia densității neutronilor (5.57) și din condiția ca $T(\mathbf{x}, t)$ să reprezinte fizic chiar temperatura neutronilor, adică

$$\frac{3}{2} kT(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\int v^2 n_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}. \tag{5.61}$$

După introducerea dezvoltării (5.58) în ecuația (5.56) și după egalarea termenilor de ordin asemănător, se obțin ecuațiile

$$\frac{\partial_0 n_0^T}{\partial T} + \mathbf{v}\nabla n_0^T = \mathcal{T}_s(n_0^T \Phi_1), \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial_0 n_0^T \Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial_1 n_0^T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla(n_0^T \Phi_1) = \mathcal{T}_s(n_0^T \Phi_2) + \mathcal{T}_s(n_0^T) - \mathcal{T}_a(n_0^T) \tag{5.63}$$

în care ∂_0 și ∂_1 reprezintă diferențieri în funcție de aproximația 0 sau 1 (primul sau al doilea termen) a dezvoltării Chapman—Enskog.

Prin ordin asemănător, în deducerea ecuațiilor precedente se consideră că $\mathcal{T}_s$ este în mărime absolută $\simeq \Sigma_s$; $|\mathcal{T}_a| \simeq \Sigma_a$; $|D| \simeq \dfrac{\nabla n}{n} \simeq$ $\simeq \sqrt{\Sigma_a \Sigma_s}$ și deci și în dezvoltarea (5.58):

$$n_1^{l+1}/n_1^l \simeq (\Sigma_a/\Sigma_s)^{1/2} \ll 1,$$

$$\mathcal{T}_s(n_0^T) \simeq \Sigma_s[(T - T_0)/T_0] \approx \Sigma_a,$$

deoarece experimental s-a determinat relația aproximativă

$$(T - T_0)/T_0 \simeq \Sigma_a/\Sigma_s.$$

Întrucît entropia în cazul aceluiași proces, determinată pur termodinamic, are o expresie de forma

$$s = -k\int n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \log n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}, \tag{5.64}$$

vom căuta să punem ecuațiile (5.62) și (5.63) sub o formă analogă. În acest scop se înmulțește ecuația (5.62) cu $\log n_0^T (1+\Phi_1) \simeq \log n_0^T + \Phi_1$ și ecuația (5.63) prin $\log n_0^T$ și se integrează pe v, obținîndu-se după unele simplificări și în cazul staționar

$$\left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \frac{\partial_1}{\partial t}\right) s - \nabla k \int \mathrm{v} n_0^T (1-\Phi_1) \log n_0^T \, \mathrm{dv} = -k \int \mathrm{v} n_0^T (1+\Phi_1) \nabla \log n_0^T \, \mathrm{dv} -$$

$$- k \int \mathcal{S}_s [n_0^T (1+\Phi_1+\Phi_2)] \log n_0^T \, \mathrm{dv} + k \int \mathcal{S}_a (n_0^T) \log n_0^T \, \mathrm{dv}. \tag{5.65}$$

Întrucît ultimul termen din membrul stîng reprezintă creșterea entropiei externe, rezultă că ceilalți termeni reprezintă chiar rata de producere a entropiei σ_1:

$$\sigma_1 = -k \int \mathrm{v} n_0^T (1+\Phi_1) \nabla \log n_0^T \, \mathrm{dv} - k \int \mathcal{S}_s [n_0^T (1+\Phi_1+\Phi_2)] \log n_0^T \, \mathrm{dv} +$$

$$+ k \int \mathcal{S}_a (n_0^T) \log n_0^T \, \mathrm{dv}. \tag{5.66}$$

Introducînd notația

$$I_n = \int \mathrm{v} n_0^T (1+\Phi_1) \, \mathrm{dv} \text{ pentru fluxul de neutroni}$$

și

$$I_Q = \int \mathrm{v} \frac{\mathrm{v}^2}{2} n_0^T (1+\Phi_1) \, \mathrm{dv} - \frac{3}{2} kTI_n \text{ pentru fluxul caloric}$$

și observînd că, datorită ecuației (5.58), termenul logaritmic de sub integrală se poate scrie sub forma

$$\nabla \log n_0^T (\mathrm{x}, \mathrm{v}) = \frac{\nabla n(x)}{n(x)} + \frac{\nabla T(x)}{T(x)} \left(\frac{v^2}{2kT(\mathrm{x})} - \frac{3}{2} \right),$$

se obține pentru rata de creștere a entropiei procesului de termalizare a neutronilor expresia

$$\sigma_1 = \nabla \left(\frac{1}{T} \right) I_Q - \frac{\nabla n}{n} kI_n + \frac{1}{T} \frac{\mathrm{d}_t E_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mu}{T} \frac{\mathrm{d}_t n}{\mathrm{d}t} - \frac{3}{2} k \frac{\mathrm{d}_t n}{\mathrm{d}t}, \tag{5.67}$$

(μ fiind potențialul chimic al unui gaz ideal), care este analogă cu cea care se poate obține prin considerente termodinamice [P—1].

În expresia (5.67), $\frac{\mathrm{d}_t E_1}{\mathrm{d}t}$ reprezintă aportul de energie în unitatea de timp al gazului de neutroni la moderator în cursul procesului de termalizare.

Calculînd în mod analog și rata de producere a entropiei moderatorului σ_2, se obține

$$\sigma_2 = \frac{1}{T_0}\frac{\mathrm{d}_i E_2}{\mathrm{d}t}, \tag{5.68}$$

deoarece acesta este menținut la temperatură constantă și nu suferă nici variație masică ($I_n = I_Q = 0$).

Întrucît cantitatea de energie cedată de neutroni moderatorului trebuie să fie egală cu cea primită de moderator, apare și condiția ($\mathrm{d}_i E_1/\mathrm{d}t + \mathrm{d}_i E^2/\mathrm{d}t = 0$), care conduce la expresia generală a ratei de creștere a entropiei pentru întreg sistemul:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \nabla\left(\frac{1}{T}\right) I_Q + \frac{\nabla n}{n} I_n + \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0}\right)\frac{\mathrm{d}_i E_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu \mathrm{d}_i n}{T\,\mathrm{d}t}. \tag{5.69}$$

Întrucît calculul lui $\frac{\mathrm{d}_i E_1}{\mathrm{d}t}$ depinde de modelul de moderator ales și a fost efectuat pentru diverse cazuri de Purohit [P—3] sau de von Dardel [V—2], nu îl mai expunem aici, redînd doar rezultatele finale:

$$I_n = -\frac{1}{3\Sigma_0} n \sqrt{\frac{8}{\pi} k T}\left[\frac{\nabla n}{n} 2K_3\theta^4 + \frac{\nabla T}{T}(2\theta^6 K_5 - 3\theta^4 K_3)\right], \tag{5.70}$$

$$I_Q = -\frac{1}{\theta^2}\left(\frac{n}{3\Sigma_0}\sqrt{\frac{2}{n} k T}\right)\left[\frac{\nabla n}{n}(2\theta^6 K_5 - 3\theta^4 K_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nabla T}{T}\left(\frac{9}{2}\theta^4 K_3 - 6\theta^6 K_5 + 2\theta^8 K_7\right)\right].$$

unde

$$\theta^2 = \frac{1}{2kT}; \qquad K_n \equiv \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\theta^2 v^2} v^n}{\Sigma_s(v)/\Sigma_0}\,\mathrm{d}v.$$

Sub o formă aproximativă, aceste expresii pot fi scrise

$$I_n = -D\nabla n - \frac{\nabla T}{T} D\beta n, \tag{5.71}$$

$$I_Q = -kTD\gamma\nabla n - kn\lambda\nabla T,$$

unde D este coeficientul de difuzie, β, γ coeficienți de termodifuzie și λ coeficient de conductibilitate termică.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.2. Temperatura „gazului" de neutroni

Ca un exemplu de aplicație practică a teoriei precedente se poate calcula funcția $T(x)$ din dezvoltarea (5.58), care reprezintă, cu condiția (5.61), temperatura neutronilor. Calea clasică de calcul al acestei mărimi este cea bazată pe folosirea ecuației (5.56), în care este introdusă valoarea reală calculată sau măsurată a distribuției $n(x, v)$.

În cazul folosirii teoriei termodinamice se ajunge la un rezultat optim prin folosirea principiului minimalității ratei de producere a entropiei procesului respectiv, considerat ca fiind staționar. Această deducere este valabilă, deoarece rata de producere a entropiei satisface condiția

$$\sigma = \int_0^\infty \sigma(x)\, dx$$

și condiția de minimalitate

$$\delta\sigma = 0.$$

În geometria plană, folosită în acest exemplu numai din motive de simplificare (deoarece densitatea și temperatura neutronilor depind numai de x) și folosind și ecuația bilanțului neutronilor,

$$\nabla I_n = -D\triangle n - D\beta\nabla n\frac{\nabla T}{T} - D\beta n\nabla\left(\frac{\nabla T}{T}\right), \tag{5.72}$$

se obține în cazul omogen

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \alpha\frac{\Sigma_a(v_{T_0})}{\Sigma_0}; \qquad \alpha = \frac{3}{4}\frac{1}{M_2} \tag{5.73}$$

$$M_2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{1}{(kT_0)^2}\iint \Phi_{M_{T_0}}(E)\,\Sigma_s(E \to E')\,(E - E')^2\, dE\, dE'$$

iar în cazul neomogen

$$\frac{T(x) - T_0}{T_0} = \left(\frac{2}{3}\beta + 1\right)\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right)_{\text{hom}} + \left[\frac{T_p - T_0}{T_0} - \left(\frac{2}{3}\beta + 1\right)\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right)_{\text{hom}}\right]e^{-kx} \tag{5.74}$$

$$k \simeq \frac{1}{\lambda}(M_2\Sigma_s)^{1/2} - \frac{1}{2L} + \frac{3}{8}\frac{1}{M_2}\frac{G_a^0}{\Sigma_s} - \frac{\lambda}{8L^2M_2\Sigma_s}.$$

Rezultatele obținute cu aceste formule în aproximația moderatorului greu au fost concordante cu cele obținute prin rezolvarea directă a ecuației de transport a neutronilor.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.3. Mediu cu gradient de temperatură

Avantajele folosirii teoriei termodinamice la termalizarea neutronilor apar și mai pregnant cînd aceasta are loc în medii (moderatori) cu neuniformități de temperatură, care sînt întîlnite cu precădere în practică.

Considerînd că $n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ este densitatea neutronilor în spațiul fazelor cu cele șase dimensiuni de poziție și viteză, astfel încît $n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, d^3x d^3v$ reprezintă probabilitatea ca neutronii să se găsească în d^3x și d^3v, ecuația de transport pentru această densitate de neutroni, în mediu neabsorbant cu surse distribuite uniform în moderator, are forma

$$\mathbf{v}\nabla n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int n(\mathbf{x}, \mathbf{v}')\, g(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) - n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, g(\mathbf{v} \to \mathbf{v}')\, d^3\mathbf{v}', \qquad (5.75)$$

în care $g(\mathbf{v} \to \mathbf{v}')$ este probabilitatea ca neutronii cu viteză inițială $\mathbf{v}$ să fie împrăștiați la viteza finală $\mathbf{v}'$.

Definind probabilitatea totală de împrăștiere a neutronilor de viteză $\mathbf{v}$ prin

$$\int g(\mathbf{v} \to \mathbf{v}')\, d^3\mathbf{v}' = \mathbf{v}\Sigma(\mathbf{v}), \qquad (5.76)$$

putem reformula ecuația de transport (5.75):

$$\mathbf{v}\nabla n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\mathbf{v}\Sigma(\mathbf{v})\, n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \int n(\mathbf{x}, \mathbf{v}')\, g(\mathbf{v}' \to \mathbf{v})\, d^3\mathbf{v}'. \qquad (5.77)$$

Înainte de a găsi soluția acestei ecuații în cazul neuniformității temperaturii moderatorului, vom aminti că pentru temperatură uniformă soluția furnizată de teoria clasică a transportului este chiar distribuția Maxwell—Boltzmann:

$$n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\ \pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\,kT}\right), \qquad (5.78)$$

care satisface și principiul bilanțului detaliat,

$$n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, g(\mathbf{v} \to \mathbf{v}') = n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, g(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}), \qquad (5.79)$$

și care ne va fi util în cele ce urmează.

Pentru tratarea neuniformității temperaturii moderatorului se folosește o metodă proprie teoriei termodinamice, și anume o dezvoltare a funcției de distribuție a neutronilor în serie Chapman—Enskog de forma

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,[1 + \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \ldots], \qquad (5.80)$$

pe care am mai întîlnit-o și în paragraful precedent, în care Φ_j sînt funcții ce descresc cu j crescător și în care am considerat drept primă aproximație (trial) chiar distribuția $n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ pentru cazul uniform.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd dezvoltarea (5.80) în ecuația (5.77) și egalînd termenii corespunzători (de același ordin în sensul din paragraful precedent), se obține

$$\mathbf{v}\nabla(n_0\,\Phi_{j-1}) = -\,v\Sigma(\mathbf{v})\,n_0\,\Phi_j + \int n_0\,(\mathbf{x},\mathbf{v}')\,\Phi_j\,(\mathbf{x},\mathbf{v}')\,g\,(\mathbf{v}'\to\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3v', \tag{5.81}$$

deoarece corespondențele respective s-au obținut considerînd că ecuația (5.77) este de forma generală $J(n) = D(n)$, în care $|J(n)| \simeq \frac{1}{l} = \Sigma$, iar $|D(n)| \simeq \frac{1}{L} \simeq \frac{\nabla T}{T}$, unde $L = 0$ lungime caracteristică pentru gradientul de temperatură.

Pentru $j = 0$ se redescoperă chiar proprietatea (5.79), în timp ce pentru $j = 1$, după divizarea cu $n_0\,(\mathbf{x},\mathbf{v})$ și prin folosirea acestei proprietăți (5.79) la reformularea termenului integral, se obține

$$\mathbf{v}\,\frac{\nabla n_0\,(\mathbf{x},\mathbf{v})}{n_0\,(\mathbf{x},\mathbf{v})} = -\,\mathbf{v}\Sigma(\mathbf{v})\,\Phi_1\,(\mathbf{x},\mathbf{v}) + \int \Phi_1(\mathbf{x},\mathbf{v}')\,g(\mathbf{v}\to\mathbf{v}')\,\mathrm{d}^3v'. \tag{5.82}$$

Această nouă ecuație se simplifică în aproximația împrăștierii izotrope $[\Sigma(\mathbf{v}) \to \Sigma(\mathbf{v})]$, deoarece aceasta este echivalentă matematic cu

$$g(\mathbf{v}\to\mathbf{v}')\,\mathrm{d}^3v' = G(v\to v')\,\mathrm{d}v'\,\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\,\pi}, \tag{5.83}$$

care implică

$$v\Sigma(v) = \int_0^\infty G(v\to v')\,\mathrm{d}v' \tag{5.84}$$

în locul definiției (5.76) și deoarece soluția aproximativă (5.78) transformă membrul stîng al ecuației (5.82) în

$$v\left[\frac{\nabla n\,(x)}{n\,(x)} + \left(\frac{mv^2}{2\,kT} - \frac{3}{2}\right)\frac{\nabla T(\mathbf{x})}{T\,(\mathbf{x})}\right]\boldsymbol{\Omega}, \tag{5.85}$$

ceea ce face ca în acest caz doar $\Phi_1\,(\mathbf{x},\mathbf{v})$ să mai depindă de $\boldsymbol{\Omega}$. Întrucît ecuația (5.82) devine în urma acestor simplificări

$$v\,\boldsymbol{\Omega}\,\frac{\nabla n_0}{n_0} = -\,v\,\Sigma\,(v)\,\mathbf{A}\,(\mathbf{x},\mathbf{v})\,\boldsymbol{\Omega} + \int_{\Omega'} G\,(v\to v')\,\mathrm{d}v'\,\mathbf{A}\,(\mathbf{x},\mathbf{v}')\,\boldsymbol{\Omega}\,\frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\,\pi}, \tag{5.86}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar prin efectuarea integralei în cel de-al doilea termen din membrul drept se explicitează expresia vectorului **A**

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, v) = -\frac{1}{\Sigma(v)} \frac{\nabla n_0}{n_0}, \tag{5.87}$$

se obține final funcția de distribuție dată de dezvoltarea (5.80) sub forma

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \left[1 - \frac{1}{\Sigma(v)} \frac{\nabla n_0}{n_0} \boldsymbol{\Omega}\right] =$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \left\{1 - \frac{1}{\Sigma(v)} \left[\frac{\nabla n}{n} + \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2}\right) \frac{\nabla T}{T}\right] \boldsymbol{\Omega}\right\}. \tag{5.88}$$

Această soluție termodinamică a distribuției neutronilor în medii moderatoare cu gradient de temperatură are două particularități remarcabile:

— demonstrează că, indiferent de direcție, această distribuție, funcție de viteză, este de tip Maxvell—Boltzmann, adică

$$n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, dv = \int_\Omega n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, d^3v = v^2 dv \int_\Omega n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, d\Omega = 4\pi\, n_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, v^2\, dv, \tag{5.89}$$

$$n(\mathbf{x}, v) = 4\pi\, v^2 n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right);$$

— gradientul de temperatură al moderatorului influențează doar distribuția vitezelor neutronilor față de direcția lor $\boldsymbol{\Omega}$, adică efectul se observă doar la curentul de neutroni.

Acest curent, definit prin

$$J = \int n(\mathbf{x}, \mathbf{v})\, \mathbf{v}\, d^3v, \tag{5.90}$$

se obține prin folosirea expresiei (5.88) pentru distribuția neutronilor și după efectuarea integrărilor respective pe viteze și direcții:

$$J = -\frac{1}{3\Sigma_0} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \left[2\left(\frac{\nabla n}{n} - \frac{3}{2}\frac{\nabla T}{T}\right) \beta^4 \int_0^\infty \frac{e^{-\beta^2 v^2} v^3}{\Sigma(v)/\Sigma_0}\, dv + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\nabla T}{T} \beta^6 \int_0^\infty \frac{e^{-\beta^2 v^2} v^5}{\Sigma(v)/\Sigma_0}\, dv\right], \tag{5.91}$$

unde $\beta^2 = m/2kT$ și $\Sigma_0 = \lim_{v \to \infty} \Sigma(v) = \text{const.}$

Această expresie termodinamică a curentului de neutroni în mediu cu gradient de temperatură se simplifică la

$$J = -\frac{1}{3\,\Sigma_0/I_3(A)}\,n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\left[\frac{\nabla n}{n}+\left(2\,\frac{I_5(A)}{I_3(A)}-\frac{3}{2}\right)\frac{\nabla T}{T}\right], \qquad (5.92)$$

unde

$$I_3(A) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}u^2\chi(\sqrt{A}\,u)\,du,$$

$$I_5(A) = \int_0^\infty e^{-u^2}u^5\chi(\sqrt{A}\,u)\,du,$$

printr-o definire adecvată a secțiunii de împrăștiere în funcție de distribuția $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ a atomilor moderatorului, analogă distribuției $n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ a neutronilor:

$$v\Sigma(v) = \int v_r\,\sigma(v_r)\,F(\mathbf{x}, \mathbf{v})\,d^3V,$$

în care v_r este viteza relativă a unui neutron de viteză v față de un atom cu viteza v, iar $\sigma(v_r)$ secțiunea de împrăștiere în sistemul de referință care consideră atomul de moderator în repaos.

În obținerea acestei simplificări s-a mai ținut seama și de faptul că $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ este de forma (5.89) și că [C—1]

$$\frac{\Sigma(v)}{\Sigma_0} = \frac{1}{\chi(\sqrt{A}\,\beta v)},$$

$$\chi(x) = \sqrt{\pi}\,x^2/\psi(x),$$

$$\psi(x) = (2x^2+1)\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\,x + x\,e^{-x^2},$$

$$x = \sqrt{A}\beta v,$$

A = masa atomică a moderatorului.

Din expresia (5.92) a curentului de neutroni în gradient de temperatură rezultă că acest transport de neutroni apare atît datorită gradientului de densitate de neutroni $\left(\frac{\nabla n}{n}\right)$, cît și gradientului de temperatură $\left(\frac{\nabla T}{T}\right)$.

Ajunși la această concluzie se poate folosi în continuare teoria termodinamică a proceselor ireversibile care permite tratarea cuplată a celor două mărimi: curent de neutroni J_n și curent de energie J_u. Cupla-

rea acestora se face prin intermediul unor forțe termodinamice generalizate X_n și X_u sub forma ecuațiilor liniare ale lui Onsager:

$$\begin{aligned} J_n &= L_{11} X_n + L_{12} X_u, \\ J_u &= L_{21} X_n + L_{22} X_u. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Întrucît expresiile acestor forțe sînt cunoscute din expresia entropiei și din relația termodinamică exprimînd egalitatea dintre procesul ratei de creștere a entropiei prin temperatura absolută cu suma produselor acestor forțe prin curenții respectivi:

$$\begin{aligned} X_n &= -T\nabla(\mu/T) = -\nabla\mu - \frac{\mu}{T}\nabla T, \\ X_u &= -\nabla T/T, \end{aligned} \tag{5.94}$$

unde

$$\mu = \mu(n, T) = kT \log\left[\frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\right],$$

$\mu = \mu(n, T)$ fiind potențialul chimic al „gazului" de neutroni presupus a fi format din n neutroni de masă m în unitatea de volum și care nu interacționează, se deduce curentul de neutroni

$$J_n = -L_{11}\left[\nabla\mu + \left(\frac{L_{12}}{L_{11}} - \mu\right)\frac{\nabla T}{T}\right], \tag{5.95}$$

unde L_{ij} sînt coeficienții cinetici ai lui Onsager. Ei sînt de fapt coeficienții unei matrici simetrice care reprezintă teorema termodinamică de reciprocitate a lui Onsager, iar L_{12}/L_{11} reprezintă o energie de transfer, care are expresii diferite în funcție de modelul fizic ales pentru „gazul" de neutroni:

$$\begin{aligned} L_{12}/L_{11} &= 2\,kT \quad \text{pentru un gaz Kundsen,} \\ L_{12}/L_{11} &= \frac{5}{2}\,kT \quad \text{pentru un gaz ideal.} \end{aligned} \tag{5.96}$$

Noua expresie termodinamică a curentului de neutroni obținută prin cuplarea celor două mărimi este

$$J = -L_{11}kT\left[\frac{\nabla n}{n} + \left(\frac{L_{12}}{L_{11}kT} - \frac{3}{2}\right)\frac{\nabla T}{T}\right]. \tag{5.97}$$

Din comparația expresiilor (5.92) și (5.97) rezultă

$$\frac{L_{12}}{L_{11}} = 2\frac{I_5(A)}{I_3(A)}\,kT, \tag{5.98}$$

care indică prin

$$\lim_{A\to\infty}\frac{L_{12}}{L_{11}}=2\,kT$$

că în cazul moderatorului cu masă grea neutronii trebuie considerați ca formînd un „gaz" Kundsen.

Scriind expresia curentului de neutroni (5.97) sub forma

$$J=-\frac{l_0 I_3(A)}{3}\Phi\left(\frac{\nabla\Phi}{\Phi}+\Sigma\frac{\nabla T}{T}\right), \tag{5.99}$$

unde $\Phi=n\,(\bar{v})=n\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ este fluxul scalar de neutroni,

iar

$$\varepsilon=2\left[\frac{I_5(A)}{I_3(A)}-1\right],$$

observăm că termenul $L_{11}kT$ reprezintă un coeficient generalizat de difuzie al neutronilor $D=\frac{l_0\,I_3(A)}{3}$ și că drumul liber mijlociu $l=l_0 I_3(A)$ scade de $I_3(A)$ ori în urma schimburilor de energie dintre neutroni și moderator.

Întrucît $\left(\frac{\nabla\Phi}{\Phi}+\varepsilon\frac{\nabla T}{T}\right)=\nabla\,(\log\Phi T^{\varepsilon})$, curentul de neutroni mai poate fi exprimat sub forma remarcabilă

$$J=-DT^{-\varepsilon}\nabla(\Phi T^{\varepsilon}), \tag{5.100}$$

care se reduce la legea lui Fick în cazul mediului fără gradient de temperatură.

Autorii acestei formulări termodinamice a termalizării neutronilor în medii cu gradient de temperatură deduc pentru același caz albedoul și condiția la marginea cu vidul.

Pentru albedoul β, calculînd din distribuția (5.88) curenții de neutroni $j^{\pm}$, ei obțin

$$\beta=\frac{j^-}{j^+}=\frac{1+2\,D\left[\frac{\mathrm{d}\log\Phi}{\mathrm{d}x}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}\log T}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}}{1-2\,D\left[\frac{\mathrm{d}\log\Phi}{\mathrm{d}x}+\varepsilon\frac{\mathrm{d}\log T}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}},$$

iar pentru condiția la margine

$$-\left.\frac{\mathrm{d}\log\Phi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{3}{2\,l}+\varepsilon\left.\frac{\mathrm{d}\log T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deși în unele cazuri practice influența gradientului de temperatură asupra transportului neutronilor este de gradul doi, deci mică, în cazuri extreme, întîlnite totuși în practică, ale unor valori mari ale gradientului de temperatură (de exemplu la reactorii de putere) această influență devine importantă. Astfel, albedoul unei plăci de grafit scade cu 1,5% (după teoria de mai sus) dacă este menținută la un gradient de temperatură $\left(\frac{\nabla T}{T}\right)$ de 15°K/cm și dacă neutronii se deplasează în direcția gradientului pozitiv.

De asemenea [V—1] dacă o masă de grafit este traversată de un flux de neutroni de 10^{14} n/cm^2 s, care asigură o densitate de $10^{14}/2{,}2 \cdot 10^5 = 4{,}55 \cdot 10^8$ n/cm^3, iar această densitate este astfel distribuită încît conduce la apariția unui gradient de densitate neutronică $\frac{\nabla n}{n} = 10^6$ n/cm^3/ /cm, curentul J_n de neutroni este dat de legea lui Fick în cazul unei temperaturi constante ($T = 293$°K):

$$J_n = -K_D \nabla n = 2 \cdot 10^5 \times 10^6 = 2 \cdot 10^{11} \; n/cm^2 s$$

(unde K_D = coeficientul de difuzie termică pentru grafit = $2 \cdot 10^5$ cm^2/s).

Influența asupra acestui flux de neutroni a unui gradient de temperatură $\nabla T = 3$°C/cm = 300°C/m este suficient de mare pentru a fi absolut necesară luarea ei în considerație. Într-adevăr, în acest caz $J_n = -K_T \nabla T$, unde

$K_T = kn K_p$;

$K_p = 4{,}84 \cdot 10^{24}$ cm/kg.s;

k = constanta lui Boltzmann = $1{,}38 \cdot 10^{16}$ erg/°C = $1{,}41 \cdot 10^{-22}$ kg cm/°C;

$K_T = 1{,}41 \cdot 10^{-22} \times 4{,}55 \cdot 10^8 \times 4{,}84 \cdot 10^{24} = 3{,}1 \cdot 10^{11}$ n/cm s°C

$J_n = 3{,}1 \cdot 10^{11} \times 3 = 9{,}3 \cdot 10^{11}$ n/cm^2 s.

Comparînd fluxurile de neutroni în cazul temperaturii constante și în cazul gradientului, observăm o creștere în ultimul caz de peste 400%. Pentru un gradient de temperatură de semn opus, efectul important al gradientului de temperatură asupra fluxului de neutroni poate fi folosit la mărirea substanțială a albedoului și deci a eficacității unui reflector de neutroni sau a capcanelor de neutroni.

Acest fapt are o deosebită importanță practică la mărirea economiei reflectorului, deci la micșorarea dimensiunilor și a masei critice a unui reactor, precum și la realizarea capcanelor de neutroni cît mai eficiente.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

C—1 Cohen E. R., PICG, **5**, 405 (1955).
F—1 Fournet G. J., J. Phys. Rad., **19**, suppl. 4, 39A—47A (1958).
G—1 Grmela M., JNE, **19**, 81 (1965).
G—2 Grmela M., UJV—1354, Cehoslovacia, 1965.
G—3 Grmela M., Kernen, **11**, 33 (1968).
H—1 Helmis G., Kernen, **7**, 156 (1964).
H—2 Helmis G., Kernen, **10**, 261 (1967).
H—3 Hall L. S., Ann. of Phys., **20**, 383 (1962).
I—1 Ingarden R. S., Bull. Acad. Polon. Sci., **11**, 541 (1963).
K—1 Kottwitz D. A., NSE, **7**, 345 (1960).
K—2 Kazarnovski M. V. et al., PICG, P/2148 (1958).
K—3 Kikuchi R., Phys. Rev., **124**, 1682 (1961).
K—4 Kuščer I. et al., Physica (1968).
L—1 Ladonchamps J. R. L. de, et al., NSE, **12**, 238 (1962).
P—1 Prigogine I., *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*, Springfield, Illinois, U.S.A., 1955.
P—2 Prigogine I., *Transport processes in statistical mechanics*, Proc. Int. Symp. Brussels, Aug. 1956, Interscience Publ. N. Y., 1956.
P—3 Purohit S. N., NSE, **13**, 250 (1962).
V—1 Veinik A. I. et al., PICG, **16**, 586, P/2224 (1958).
V—2 Von Dardel G. F., Phys. Rev., **94**, 1272 (1954).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 6

Aproximaţia cuanto-mecanică

Considerată în modul cel mai general, teoria transportului neutronilor într-un reactor nuclear reprezintă, datorită interacţiunilor neutronilor cu mediul, o problemă echivalentă cu problema cuanto-mecanică a n corpuri.

În cursul unei reacţii nucleare de fisiune în lanţ declanşată în reactor, neutronii apar în fisiuni, suferă diverse tipuri de ciocniri, absorbţii, scăpări din sistem, produc noi fisiuni, reacţii de activare etc. Toate aceste procese au loc cu anumite probabilităţi (secţiunile nucleare), care sînt determinate mai ales experimental. Traiectoriile neutronilor în cursul acestor procese sunt analoge, cu anumite restricţii, cu cele ale moleculelor de gaz, ceea ce a sugerat de la început folosirea teoriei „clasice" a transportului dată de aproape un secol de Boltzmann în studiul cineticii gazelor şi caracterizată de o complicată ecuaţie integro-diferenţială neliniară.

Datorită faptului că ciocnirile neutronilor între ei în reactor au o probabilitate extrem de mică şi pot fi neglijate, se obţine o „simplificare" a ecuaţiei de transport a lui Boltzmann, deoarece pentru descrierea transportului neutronilor este suficientă forma liniară a ecuaţiei lui Boltzmann. Ea rămîne totuşi complicată şi deosebit de dificil de soluţionat, datorită faptului că încearcă să exprime comportarea tuturor neutronilor (care ating densităţi de 10^8—10^{10} n/cm^3 în reactor) în funcţie de un mare număr de parametri şi procese.

Datorită acestor particularităţi, teoria transportului reprezintă o tratare din punctul de vedere al mecanicii statistice a unui foarte mare număr de evenimente.

Datorită analogiei limitate cu tratarea cuanto-mecanică a problemei celor n-corpuri, au apărut o serie de lucrări [M—1] [O—2], [O—3] dedicate încercării de a folosi unele dintre avantajele acestei formulări la soluţionarea problemelor de transport al neutronilor. Ele se bazează pe formulările cuanto-mecanice existente ale ecuaţiei Boltzmann clasice (neliniare) [H—1], [K—1], [L—1], [O—1], [P—1], [W—1], [W—2].

În acest scop se apelează iniţial la cea mai generală ecuaţie Liouville, care descrie un sistem de particule de varietăţi diferite (în cazul teoriei transportului, sistemul este un „gaz" de neutroni de diverse energii).

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație Liouville pentru sistemul de n particule în spațiul Γ se formulează în funcție de o funcție de distribuție $f^{(n)}$ acestor particule :

$$\mathfrak{D} f^{(n)} \equiv \frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial f^{(n)}}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial f^{(n)}}{\partial p} = 0,$$

unde p și q reprezintă coordonatele 3 n-dimensionale ale poziției și momentului particulelor, iar H este hamiltonianul $H = H(q, p; t)$ din care se presupune că pot fi derivate forțele de interacțiune și vitezele particulelor individuale.

Funcția de distribuție $f^{(n)}$ trebuie să satisfacă o condiție de normalizare

$$\int f^{(n)} \, d\Gamma = 1,$$

iar $f^{(n)}(q \cdot p\,;\, t)\, d\Gamma$ reprezintă o probabilitate ca sistemul de n particule să poată fi descris de un „punct" din elementul de volum $d\Gamma$ din spațiul $(q \cdot p)$ la momentul t.

Expresia $\left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q}\right)$ reprezintă, la rîndul ei, un flux de particule.

Întrucît o astfel de ecuație este imposibil de rezolvat datorită ordinului foarte mare al funcției de distribuție neutronică și a imposibilității de a specifica toate condițiile inițiale (poziția și momentul fiecărei particule), se recurge la funcții de distribuție de ordin mai mic și chiar la descompunerea hamiltonianului H în două componente pentru particula liberă și pentru interacțiunea ei.

Sistemul însuși de n particule împreună cu interacțiunile sale interne este considerat ca un ansamblu al tuturor stărilor posibile, iar comportarea reală a sistemului este abordată pe baza comportării unor medii luate pe întregul ansamblu, după ce în prealabil stărilor posibile le-au fost repartizate anumite ponderi.

Tratarea cuanto-mecanică a sistemului folosește operatorul densitate D_n. Deoarece pentru n mare deducerea și utilizarea acestui operator este imposibilă sau dificilă, se folosesc operatorii densitate reduși F_s $(s = 1, 2, \ldots)$, care sînt definiți ca integrale ale operatorului de densitate D_n. Acești operatori satisfac un sistem infinit de ecuații diferențiale care se poate reduce la o singură ecuație diferențială pentru o funcțională L, care generează operatorii F_s. În primă aproximație se deduce [L—1] ecuația Boltzmann cuanto-mecanică din dezvoltarea funcționalei generatoare F_1.

Au mai fost efectuate încercări de a formula cuanto-mecanic ecuația lui Boltzmann, bazate tot pe ecuația Liouville, prin folosirea unei funcții de distribuție Wigner (cu o „granulație" fină, adică cu o discretizare fină în timp) care conduce la o ecuație de tip Wigner. Această funcție

Scanned with OKEN Scanner

de distribuție cuanto-mecanică a sistemului de particule în spațiul fazelor este de fapt o transformată Fourier a matricei de densitate.

Alți autori, bazîndu-se tot pe matricea de densitate și calculînd prin teoria perturbației o medie în timp a acesteia, au ajuns la rezultate analoge prin intermediul unei ecuații Uhling—Uhlenbeck.

Totuși, calea cea mai simplă și mai intuitivă pentru generalizarea cuanto-mecanică a ecuației de transport a lui Boltzmann este cea bazată pe modificarea integralei de ciocniri din această ecuație în forma ei clasică printr-o secțiune cuanto-mecanică de interacțiune [W—1].

În cazul transportului neutronilor, această procedură ar fi echivalentă cu înlocuirea secțiunilor de ciocnire clasice prin cele cuantice.

Dintre lucrările dedicate deducerii cuanto-mecanice a ecuației de transport pentru neutroni, doar una [O—2] este dedicată unei aplicații practice, celelalte rezervîndu-se la formulări generale.

În această lucrare se pornește de la ecuația Liouville a sistemului pe care îl constituie neutronii sau alte particule existente în reactor :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[D, H]$$

pentru matricea de densitate.

Ca un exemplu practic al aplicării acestei formulări, în lucrarea citată se deduc ecuațiile bilanțului neutronic, iar prin intermediul acestora se calculează valorile medii și variațele vitezei de numărare ale particulelor alfa într-un contor de trifluorură de bor (BF_3), utilizat curent la detectarea și la înregistrarea neutronilor din reactor. Autorii subliniază faptul remarcabil că cele mai importante efecte macroscopice nucleare ale transportului neutronilor în reactor apar în mod cu totul natural.

De asemenea, fenomenele de interferență neutronică, care sînt efecte tipic cuanto-mecanice și au importanță în special la studiul neutronilor de joasă energie, sînt bine reprezentate în expresiile analitice deduse în cadrul acestei aproximații.

Cunoscînd importanța practică pe care o are analiza cu neutroni lenți în studiul corpului solid, rezultă că aproximația, ale cărei principii au fost schițate în acest capitol găsește aplicații practice imediate.

Întrucît formulările cuanto-mecanice ale teoriei clasice a transportului sînt numeroase, dar necesită cunoștințe și noțiuni care depășesc tematica acestei lucrări (mai ales în ceea ce privește reducerea lor la forma liniară caracteristică transportului neutronilor), și numai cîteva dintre ele [M—1] [O—2], [O—3] se referă la cazul special al transportului neutronilor, am considerat utilă doar expunerea principiilor în acest capitol, lăsînd pe seama cititorului interesat de amănunte consultarea bibliografiei indicate.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

H—1 Hall L. S., Ann. of Phys., **20**, 383 (1962).
K—1 Klein M. J., *Transport processes in statistical mechanics*, New York, Intersci. Publ. Inc., 1958.
L—1 Lewis M. J., J. Math. Phys., **3**, 1229 (1962).
M—1 Meyer K., Kernen., **9**, 225 (1966); **10**, 364 (1967); **11**, 106 (1968).
O—1 Ono S., Prog. Theor. Phys. Japan, **12**, 113 (1954).
O—2 Osborn R. K. et al., TANS, **6**, 6 (1963).
O—3 Osborn R. K. et al., *Foundations of neutron transport theory* (*ANS monograph*), Dept. Nucl. Engin. Univ. of Michigan.
P—1 Prigogine I. (edit.), *Transport processes in statistical mechanics*, New York—Londra, Intersci. Publ. Inc., 1956.
W—1 Watson K. M., Phys. Rev., **118**, 886 (1960).
W—2 Wigner E. P., Proc. Symp. Appl. Math., **XI**, 89 (1961).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 7

Aproximaţia abstractă a transportului neutronilor

Lucrarea japonezului Kato [K—1], apărută în 1953, în care sînt expuse principii foarte generale şi fecunde pentru rezolvarea ecuaţiilor de evoluţie ale unor procese fizice în spaţii Banach, a condus la o extensiune remarcabilă la teoria transportului neutronilor [R—1], [R—2].

Extensiunea constă în reformularea problemelor de transport prin luarea în considerare simultană a valorilor iniţiale şi a celor la margine şi a variaţiilor în timp pe care le pot suferi proprietăţile fizice şi nucleare ale mediilor cu care interacţionează neutronii (zone active, combustibili, moderatori, reflectori, protecţie etc.).

Sub forma actuală, extensiunea amintită conţine o restricţie în cazul luării în considerare a deformaţiei materialelor (dilatări etc.), pe care o admite doar de-a lungul unei traiectorii a neutronilor de la punctul-sursă la un punct oarecare din mediu.

Soluţia furnizată de acest mod abstract de abordare se obţine sub forma unui operator de evoluţie care se aplică datelor iniţiale şi care permite deducerea distribuţiei neutronice într-un mediu D ale cărei proprietăţi variază în timp.

Matematic, această metodă conduce la constatarea că ecuaţia de transport poate fi considerată ca un caz-limită al ecuaţiilor diferenţiale hiperbolice.

Primele rezultate indică faptul că metoda se aplică bine la studiul variaţiilor normale ale dimensiunilor critice ale reactorilor şi la variaţiile cu caracter exploziv.

Acest mod abstract de abordare nu este nou în fizica reactorilor nucleari, deoarece el a mai fost utilizat cu succes la demonstrarea existenţei şi a unicităţii soluţiilor ecuaţiei de transport a bilanţului neutronilor în reactori finiţi [H—1], la definirea criticităţii unui reactor pe baza noţiunilor destul de neobişnuite pentru fizicieni, dar comune pentru matematicieni, de ireductibilitate, pozitivitate şi primitivitate a proceselor de multiplicare prin fisiune în lanţ [B—1] sau la definirea aceleiaşi criticităţi pe baza proprietăţilor de nenegativitate a matricelor caracteristice ale reactorilor [B—2]. Chiar dacă autorul citat afirmă cu multă seninătate că acest mod abstract de abordare al problemelor de fizică a reactorilor este „în realitate mult mai simplu decît metodele clasice cu care fizicienii sînt familiarizaţi", vom vedea că, prin cunoştinţele foarte speciale de matematică modernă pe care le presupune, ele necesită un efort

mai mare decît pentru matematicienii care într-adevăr sînt familiarizați cu ele.

Această afirmație este cu atît mai adevărată pentru marea categorie a fizicienilor și a inginerilor cei mai apropiați de practică, care trebuie să folosească metodele moderne de calcul pentru proiectarea și construirea reactorilor și mai ales pentru funcționarea lor în condiții optime.

Metoda abstractă de abordare a ecuației de transport pentru neutroni în spații Banach mai permite [H—1] ca, prin definirea unor operatori complet continui ai ecuației de transport care să păstreze invariant un con din spațiul Banach, să se poată generaliza teorema lui Hille—Yoshida și a lui Jentzsch la acești operatori. Ca rezultat imediat se obține o funcție proprie pozitivă generalizată și adjuncta ei, care reprezintă corect comportarea reactorului în cazul independent de timp, cînd este reală și de modul minim, sau în cazul dependent de timp, cînd posedă o parte reală maximă.

Generalizarea la cazul multidimensional continuu este complicat de apariția unor ecuații dificile, care se reduc la ecuații algebrice în cazul discretizării spațiale (utilizarea unei aproximări analoge cu cea multigrup la variabilele spațiale, ca în metodele ordonatelor discrete).

Folosind aceeași formulare abstractă în spații Banach ca și în lucrările citate, se obține [M—1] o metodă iterativă pentru rezolvarea ecuației de transport cu o bună convergență.

Această metodă permite înlocuirea spectrului de valori proprii al ecuației de transport într-o problemă de ecuații neomogene mai ușor de rezolvat.

Cea mai generală formulare abstractă a proceselor de transport bazată pe folosirea algebrelor booleene și a teoriei informației a fost dată însă în lucrările [I—1] și [H—2], în care se stabilește, pe de o parte, faptul că ecuația lui Boltzmann este un caz special al noțiunii generale de informație (Shannon), iar pe de alta se deduce, printr-un principiu variațional de maximizare a entropiei sistemului, scăderea cantității de informație a acestei ecuații la diverse aproximări.

Acest aport remarcabil al unor metode atît de abstracte în fizica reactorilor este datorat eforturilor unor matematicieni reputați (vezi bibliografia și în special [B—1] și [P—1]).

Întregul capitol poate fi considerat un exemplu elocvent de efervescență fecundă produsă în rîndul matematicienilor de dificultățile matematice întîlnite în rezolvarea ecuației de transport al neutronilor, efervescență analogă cu cea care în timpul celui de-al doilea război mondial și din aceleași motive, accentuate de necesitățile militare, a condus la dezvoltarea teoriei și tehnicii mașinilor electronice de calcul.

Formularea abstractă a teoriei transportului neutronilor este posibilă datorită faptului că procesul de multiplicare neutronică prin fisiuni în lanț întrunește condițiile necesare și suficiente pentru a fi considerat

Scanned with OKEN Scanner

ca formînd un semigrup de transformări liniare, nenegative de un singur parametru ale unei latici Banach adecvate.

Această latice Banach este constituită de un tip special de spațiu vectorial, caracterizat de nenegativitatea elementelor sale care formează așa-numitul con nenegativ al spațiului Banach.

Transformările T ale acestui spațiu vectorial formează un semigrup, deoarece :

— sînt liniare, adică satisfac relațiile vectoriale

$$T(c\psi) = cT(\psi),$$
$$T(\Phi + \psi) = T(\Phi) + T(\psi);$$

— sînt nenegative, deci

$$T(\Phi) \geqslant 0 \text{ pentru } \Phi \geqslant 0;$$

— satisfac pentru orice t pozitiv și u oarecare relația

$$T_u[T_t(\Phi)] = T_{t+u}(\Phi).$$

Se consideră că diversele procese fizice, ca împrăștierea neutronilor (S), absorbția lor (A), fisiunea (F) sau totalitatea acestor procese (T), constituie submulțimile $\mathfrak{F}$ ale unui domeniu σ în spațiul fazelor Ω.

Acestea definesc un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, cunoscut în teoria proceselor stohastice. Domeniul σ satisface condițiile de intersecție, uniune și complementaritate care permit considerarea lui drept o algebră booleană.

Pe acest domeniu $\mathfrak{F}$ se poate considera mulțimea funcționalelor $v(S)$, definite pe baza submulțimilor S amintite și care satisfac

$$v\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v(S_k)$$

dacă $S_i \cup S_j = 0$ pentru orice $i \neq j$.

Din punct de vedere fizic, aceste funcționale $v(S)$ prezintă un deosebit interes în teoria transportului neutronilor, deoarece reprezintă valori medii ale mărimilor neutronice în S; din punctul de vedere matematic al formulării abstracte, mulțimea acestor funcționale (valori medii neutronice) reprezintă un spațiu vectorial real; orice valoare nenegativă a acestor funcționale poate fi considerată deci o distribuție neutronică.

Mai mult chiar, acest spațiu vectorial definit de funcționalele neutronice posedă o normă $|\nu|$ ale cărei proprietăți, exprimate prin

(1) $|\nu| > 0$ dacă $\nu \neq 0$,

(2) $|\nu + w| \leqslant |\nu| + |w|$,

(3) $|\lambda\nu| = |\lambda|\,|\nu|$ pentru orice scalar λ,

(4) există un ν în acest spațiu vectorial pentru care $|\nu_n - \nu| \to 0$ dacă $|\nu_m - \nu_n| \to 0$ cînd $m, n \to \infty$, îl caracterizează drept un spațiu Banach.

Dacă $S, A, F, \ldots$ sînt considerați operatori integrali definiți pe o latice Banach, se poate ușor realiza combinarea lor sub forma unei algebre Banach de forma

$$P = [I + S + S^2 + \ldots] F = [I - S]^{-1} F.$$

Ne vom opri aici cu expunerea noțiunilor elementare necesare abordării matematice abstracte a unor probleme din teoria transportului neutronilor, considerînd că cea mai utilă continuare pentru cititorul interesat o constituie lectura lucrărilor citate în bibliografie.

Considerăm de asemenea că scopul nostru, de a atrage atenția specialiștilor asupra existenței acestor preocupări, asupra domeniilor de aplicabilitate și asupra avantajelor lor, va fi atins și prin expunerea cîtorva exemple practice de abordare a problemelor fizicii reactorilor.

7.1. Metoda Kato-Reed

Se consideră [R—1] că reactorul nuclear constituie un corp $\mathfrak{D}$ tridimensional, în care pot avea loc în timpul funcționării diverse variații, reprezentabile printr-o transformare Lagrange

$$x = x(\xi, t),$$

unde variabila Lagrange ξ (ξ_1, ξ_2, ξ_3) și imaginea sa $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{D}$ la momentul t sînt date.

Funcția de distribuție $u(\xi, v, t)$ a neutronilor în $\mathfrak{D}$, în care $\mathfrak{D}$ este considerat variabil în spațiu și timp, va fi descrisă de o ecuație de transport de forma

$$u_t + (v - \dot{x}) J^{-1} \operatorname{grad}_\xi u - \sigma(\xi, v, t) u = \int_v K(\xi, v, v', t) u(\xi, v', t) \, dv', \tag{7.1}$$

în care condițiile inițiale, respectiv la margine, sînt

$$u(\xi, v, 0) = u_0(\xi, v),$$

$$u(\xi, v, t) = 0 \qquad \text{pentru } \xi \in \mathfrak{B}(v, t)$$

dacă se notează marginile lui $\mathfrak{D}$ prin

$$\mathfrak{B}(v, t) = \{\xi \in \mathfrak{D} \mid \xi + s (J^{-1})' (v - \dot{x}) \in \mathfrak{D} \text{ pentru } 0 < S < \epsilon(\xi, v, t)\}. \tag{7.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Celelalte notații din ecuație reprezintă :

$\dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial t}$,

$J = J(\xi, t)$ = matricea jacobiană a transformării Lagrange,

— vitezele neutronilor $v = (v_1, v_2, v_3) \in V$ formează o submulțime din E_3, în timp ce produsul $\mathfrak{D} \times V$ reprezintă spațiul fazelor,

— K este obișnuitul nucleu integral (pentru împrăștiere sau pentru alt proces nuclear).

O comparație a ecuației (7.1) cu ecuația echivalentă pentru cazul mediului $\mathfrak{D}$ invariabil este utilă, deoarece conduce la posibilitatea deducerii uneia din alta.

Ecuația de transport pentru mediu invariabil va avea forma

$$u_t + v \operatorname{grad}_x u - \sigma(x, v)\, u = \int_v K(x, v, v')\, u(x, v', t)\, dv', \qquad (7.3)$$

cu condițiile inițiale și la margine

$$u(x, v, 0) = u_0(x, v),$$

$$u(x, v, t) = 0 \text{ pentru } x \in \mathfrak{B}(v)$$

și în care marginea este reprezentată prin

$$\mathfrak{B}(v) = \{x \in \mathfrak{D} \mid x + sv \in \mathfrak{D} \text{ pentru } 0 < S < \epsilon(x, v)\}.$$

În această ecuație nu a mai apărut variabila Lagrange ξ, deoarece ea descria variația mediului, care în acest caz este nulă, iar în expresia $\mathfrak{B}$ care descrie funcția condițiilor la marginea lui $\mathfrak{D}$ nu mai apare variația temporală.

Condițiile la margine pentru fiecare dintre problemele precedente se pot deduce atît prin rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale ordinare ale caracteristicilor :

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (J^{-1})'(w, t)\,[v - \dot{x}(w, t)], \qquad (7.4)$$

$$w(\xi, v, t, 0) \equiv \xi,$$

cît și prin folosirea condiției de anulare a funcției u de distribuție a neutronilor la punctele de la margine care sînt valori inițiale pentru caracteristici.

Aceste condiții la margine se rescriu deci în cazul mediului variabil

$$\mathfrak{B}(v, t) = \{\xi \in \dot{\mathfrak{D}} \mid J^{-1} n(\xi)\,[v - \dot{x}] < 0\},$$

iar în cazul mediului invariabil

$$\mathfrak{B}(v) = \{ x \in \dot{\mathfrak{D}} \mid nv < 0 \},$$

unde n este vectorul normal spre exterior în punctul x.

În lucrarea citată [K—1] a lui Kato este propusă și demonstrată o teoremă esențială pentru rezolvarea ecuațiilor de evoluție de tipul celor de transport, în spații Banach.

Această teoremă afirmă că, pentru orice t satisfăcînd condiția $0 \leqslant t \leqslant T$, o problemă de valori inițiale de forma

$$\frac{du}{dt} = A(t);\ u(0) = u_0 \tag{7.5}$$

are o soluție unică exprimată prin

$$u(t) = U(t, 0)\, u_0, \tag{7.6}$$

în care $U(t, s)$ este un operator de evoluție „puternic" continuu în domeniul (un triunghiu) reprezentat de $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ și de $U(t, s) = U(s, n) = U(t, r)$.

În ecuația de mai sus, $A(t)$ este un operator liniar închis, definit într-un spațiu Banach X al cărui domeniu Δ este independent de t și care satisface condiția

$$|[\lambda - A(t)]^{-1}| \leqslant 1/\lambda \tag{7.7}$$

pentru un λ uniform în t și > 0.

De asemenea, pentru ca teorema de mai sus să fie valabilă, operatorul $A(t)$ trebuie să mai definească și o funcție $P(t)$ puternic și continuu diferențiabilă în t:

$$P(t) = [I - A(t)]\,[I - A(0)]^{-1}. \tag{7.8}$$

7.1.1. Deformarea liniară a mediului

Pentru folosirea acestei teoreme în problema determinării funcției de distribuție a neutronilor în mediu variabil, se folosește observația remarcabilă că ecuația de evoluție (7.1) a procesului de transport al neutronilor se poate scrie sub formă operațională

$$B(t)\, U = A(t)\, U - B(t)\, U, \tag{7.9}$$

în care operatorii

$$\begin{aligned} B(t)\, U &= u_t + (v - \dot{x})\, J^{-1} \operatorname{grad}_\xi u - \sigma(x, v, t)\, u, \\ A(t)\, U &= B(t)\, U + \int_v K(\xi, v, v', t)\, u(\xi, v', t)\, dv' \end{aligned} \tag{7.10}$$

satisfac condițiile teoremei numai dacă $x(\xi, t) = \alpha(t)\,\xi$. Această nouă condiție impusă transformării Lagrange care descrie variabilitatea mediului $\mathfrak{D}$ se traduce fizic prin interdicția altor variații ale mediului decît cele de-a lungul traectoriilor neutronice.

În practică, o astfel de variație se întîlnește la dilatări ale mediului sau la explozii.

Faptul că operatorul $B(t)$ și implicit $A(t)$ satisface condiția (7.7) se demonstrează prin calculul rezolventei sale, care se obține, ca de obicei, prin integrarea de-a lungul unei caracteristici între un punct dat și o margine.

În această demonstrație mai este necesar a se lua în considerare pentru X spațiul Banach complet al funcțiilor cu discontinuități la caracteristici date (un spațiu Banach al funcțiilor continue pe părți), care are normă maximă.

7.1.2. Deformare arbitrară a mediului

Este important de subliniat că în cazul general al unor deformări arbitrare ale mediului $\mathfrak{D}$ se deduce așa-numita „inegalitate a energiei" în urma aproximării ecuației de evoluție în v (viteza, deci energia neutronilor) prin funcțiile cu discontinuități ce definesc spațiul Banach. Inegalitatea energiei reprezintă de fapt o condiție pe care trebuie s-o satisfacă funcția de distribuție neutronică și a cărei consecință principală o constituie unicitatea soluției furnizate de această metodă abstractă ecuației de transport al neutronilor.

Această aproximare conduce, pe de o parte, la degenerarea termenului integral din ecuație într-o sumă și are ca rezultat stabilirea faptului, amintit mai sus, că ecuația de transport în această formulare abstractă este un caz limită al ecuațiilor hiperbolice, iar pe de altă parte ea permite înlocuirea unei condiții la margine printr-o normă de tipul (7.7).

Pentru exprimarea matematică a celor de mai sus este necesar a lua în considerare și cazul în care $x(\xi, t)$ este arbitrar (adică deformarea mediului $\mathfrak{D}$ este arbitrară și nu numai de-a lungul traiectoriilor neutronice).

În acest scop se consideră un domeniu cilindric Q din mediul $\mathfrak{D}$ definit de planele $t = 0$ și $t = h$ și intersecția $\mathfrak{D}$ a acestuia cu planul $t = \tau$, în care $0 \leqslant \tau \leqslant h$. Este evident din definiție că acest cilindru reprezintă o variație în timp.

Considerînd termenul $(J^{-1})'\,[v - \dot{x}]$ la marginea verticală a acestui cilindru (notată cu $\tilde{Q}$), se observă că poate fi reprezentat prin componente de forma $a_i = a_i\,(\xi, v, t)$, în care

$$\sum_{i=1}^{3} a_i\, n_i < 0,$$

deoarece $n_i = (n_1, n_2, n_3)$ reprezintă vectorul normal la $\mathfrak{D}$.

În acest caz, ecuația (7.1) poate fi rescrisă

$$u_t + \sum_{l=1}^{3} a_l u_{\xi_l} + \sigma u - \int_v K(\xi, v, v', t)\, u(\xi, v', t)\, dv' = 0 \qquad (7.11)$$

sau

$$Lu = 0,$$

unde expresia lui L este evidentă, iar condițiile inițiale și la margine rămîn aceleași ca pentru ecuația (7.1).

În spațiul Hilbert $H_r(t)$ al funcțiilor de distribuție neutronică $u(t) = u(\xi, v, t)$, se definește produsul scalar

$$u(t)\, w(t) = \int_v \int_{\mathfrak{D}_t} \sum_{p=r} D^p u\, \overline{D^p w}\, d\xi\, dv, \qquad (7.12)$$

care este util la deducerea inegalității energiei.

În această definiție, D^p reprezintă derivata de ordin p a funcției u față de ξ, cu $D^0 u = u$, ceea ce conduce la

$$|u(t)|_r^2 = \int_v \int_{\mathfrak{D}_t} \sum_{|p| \leqslant r} |D^p u|^2\, d\xi\, dv, \qquad (7.13)$$

iar noua funcție w este astfel aleasă, încît, dacă

$$(u, w) = \int_{V \times Q} u\overline{w}\, d\xi\, dv\, dt, \qquad (7.14)$$

atunci

$$|u|^2 = \int_0^h |u(t)|_0^2\, dt. \qquad (7.15)$$

Cu aceste proprietăți, funcția w permite exprimarea operatorială a ecuației abstracte de transport (7.11) sub forma

$$L^* u = -\left[w_t + \sum_{l=1}^{3} a_l w_{\xi_l} - \sigma w + \int_v K(\xi, v, v', t)\, w(\xi, w', t)\, dv' \right] = 0. \qquad (7.16)$$

Aceasta conduce la identitatea remarcabilă

$$(w, Lu) - (L^* w, u) = \int_v \int_{\tilde{Q}} w\, u \sum_{l=1}^{3} a_l\, n_l\, ds\, dt + [w(t), u(t)]_0 - [w(0), u(0)]_0, \qquad (7.17)$$

care permite deducerea directă a inegalității energiei:

$$|u(t)|_r^2 \leqslant c\, |u(0)|_r^2 + \int_0^t |f(t')|_r\, dt'. \qquad (7.18)$$

7.2. Metoda Habetler-Martino [H—1]

După cum se știe, în aproximația monoenergetică (monogrup) a ecuației de transport se păstrează proprietatea de autoadjunctivitate a operatorilor care intervin, ceea ce asigură o rezolvare mai simplă și în unele cazuri riguroasă a acestei ecuații.

Dar, deoarece în majoritatea reactorilor nucleari termici aproximația monoenergetică este grosolană, se recurge la aproximația multienergetică (multigrup), care permite o descriere mai corectă a proceselor pe care le suferă neutronii în reactor.

Această formulare multienergetică, bazată pe discretizarea variabilei energie în n intervale (grupe de neutroni), conduce la înlocuirea ecuației de transport al neutronilor printr-un sistem de n ecuații diferențiale. Operatorii diferențiali însă nu mai posedă în acest caz proprietatea de autoadjunctivitate și deci metodele clasice de aproximare nu se mai pot aplica riguros.

În acest caz s-a dovedit deosebit de fecundă teoria matematică spectrală a funcțiilor proprii pozitive ale acestor ecuații, a căror existență și unicitate coincide cu existența și unicitatea soluțiilor ecuațiilor multienergetice ale transportului neutronilor.

Pentru a aborda teoria transportului din acest unghi de vedere, pe cît de abstract și de modern pe atît de bogat în rezultate valoroase, se presupune că regiunea R, definită de reactorul nuclear, este o regiune conexă finită în spațiu și care satisface relația

$$\bar{\mathbf{R}} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{R}}_i,$$

unde R_i sînt regiuni regulate, deschise, simplu conexe și disjuncte, iar barele reprezintă închiderea topologică în matricea euclideană.

În continuare sînt definite o serie de funcții și de proprietăți matematice nu pornind, ca în metodele clasice de la descrierea proceselor fizice, ci prin construirea lor pur matematică prin analogii, inițial formale, cu expresii din teoria transportului neutronilor.

Aceste „mărimi" matematice sînt tratate apoi făcînd abstracție de sensul lor fizic, ceea ce permite deducerea cu o mare generalitate a tuturor proprietăților matematice pe care le pot avea în cadrul teoriei folosite.

Proprietățile matematice astfel deduse sînt „traduse" în limbaj fizic pe baza unicelor analogii inițiale, care sînt mult extinse.

Astfel se consideră că există $(2n^2 + n)$ funcții reale, definite de $d_j(r) \geqslant 0$; $a_{jk}(r) \geqslant 0$ $(j \neq k)$; $a_{jj} \leqslant 0$; $f_{jk}(r) \geqslant 0$ $(1 \leqslant j, k \leqslant n, r \in R)$, în care a_{jk} și f_{jk} $[d_j]$ au derivate parțiale de ordinul unu și doi continue și mărginite în fiecare regiune.

Această problemă pur matematică își găsește un corespondent fizic doar în momentul în care considerăm că n poate reprezenta numărul de grupe de energie ale neutronilor dintr-un reactor, că funcțiile d, a, f pot reprezenta anumite mărimi neutronice (difuzie, absorbție, fisiune), iar R_i sînt regiunile unui reactor multiplu.

Continuînd tratarea pur matematică, se pot defini $R_{jk} \subset R$ ca regiuni ce cuprind punctele $r \in R$ în care sînt satisfăcute condițiile $a_{jk}(r) > 0$ sau $f_{jk}(r) > 0$, iar j și k definesc un șir finit de numere întregi $j = \alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q = k$, a căror măsură Lebesgue $R_{\alpha_i \cdot \alpha_{i+1}}$ este pozitivă pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, q-1$. Și în această formulare pur matematică există un sens fizic legat de problema reactorului, deoarece condițiile impuse asupra lui a sau f în regiunile R_{jk} reprezintă faptul fizic evident că numai în acele regiuni ale reactorului ($R_{jk} \in R$) există absorbții și fisiuni neutronice. În ceea ce privește proprietatea indicilor j, k, ea are un corespondent fizic în probabilitatea diferită de zero (pozitivă) pe care o are „urmașul" unui neutron din grupul de energie j de a apărea în grupul de energie k pentru orice $j, k \leqslant n$.

Și transportul neutronilor este descris de condiția

$$d_j(r) \geqslant \delta \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Se mai definește o funcție

$$\Phi = [\Phi_1(r), \Phi_2(r), \ldots, \Phi_n(r)],$$

care satisface condițiile

1) fiecare $\Phi_j(r)$ are derivate continue și mărginite de ordin doi în R_{ij},

2) atît $\Phi_j(r)$, cît și componentele perpendiculare $d_j(r)$ grad $\Phi_j(r)$ sînt continue de-a lungul interfețelor regiunilor R_{ij},

3) $\Phi_j(r)$ satisfac condiția $\Phi_j(r) + \alpha_j(r)\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial n}\right) = 0$, (normala exterioară) la marginea regiunii R pentru orice funcție $\alpha_j(r) \geqslant 0$ continuă pe părți,

condiții necesare asigurării apartenenței ei la o clasă C, iar pentru funcția $\Phi \in C$ se poate construi un operator diferențial de forma

$$D_j \Phi = \operatorname{div}[d_j(r) \operatorname{grad} \Phi_j(r)]. \tag{7.19}$$

În aceste ultime definiții, paralelismul dintre formularea unei probleme matematice și rezultatele existente ale unei probleme de fizică a reactorilor este evident, întrucît Φ poate reprezenta o distribuție energetică multigrupală de neutroni, în timp ce proprietatea exprimată de relația (7.19) nu este altceva decît termenul de difuzie a neutronilor din ecuația de transport. În (7.19), $D_j = D_j \delta_{jk}$ este matricea diagonală a operatorilor diferențiali, care reprezintă din punct de vedere fizic un coeficient de difuzie multigrup. Și funcțiile $\alpha_{jk}(r)$ și $f_{jk}(r)$ pot fi formulate

matriceal în această aproximație multigrupală, fiind reprezentate de matricele A și, respectiv, F.

Cu aceste mărimi introduse matematic se poate defini o ecuație de tipul celei de transport pentru neutroni:

$$\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t} = (D + A + \nu F)\,\Phi(r,t) + S(r,t), \tag{7.20}$$

unde ν este un scalar pozitiv, iar S reprezintă sursele de neutroni.

Problemele de bază ce se pun în fizica reactorilor în legătură cu această ecuație se reduc la soluționarea ei în cazul staționar (independent de timp) și în cazul dependent de timp. În primul caz trebuie determinat numărul real minim ν pentru care este posibilă o stare staționară a reactorului în lipsa surselor ($s = 0$) și pentru care ecuația, scrisă sub forma celor de valori proprii ($A\Phi = \lambda\Phi$), este

$$-(D + A)\,\Phi(r) = \nu F \Phi(r). \tag{7.21}$$

În al doilea caz, trebuie determinate acele valori nenegative ale lui ν pentru care există soluții ale ecuației dependente de timp fie în condițiile existenței unei surse $S(r,t) \not\equiv 0$ și ale unei condiții inițiale $\Phi(r,0)$, fie în condițiile absenței sursei ($s = 0$) și pentru t mare, cînd se obțin așa-numitele soluții asimptotice.

Părăsind pentru moment interpretarea fizică a acestor operații, se deduc proprietățile matematice ale operatorului D (matricea diagonală), stabilindu-se că este autoadjunct și că i se poate defini o funcție Green G_j care să satisfacă relațiile

$$\begin{aligned} &\int_R G_j(r,s)\, D_j\, \Phi_j(s)\, \mathrm{d}V_s = -\Phi_j(r), \\ &\int_{R\times R} |G_j(r,s)|^2\, \mathrm{d}V_r\, \mathrm{d}V_s < \infty. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Se mai definește, în sfîrșit, pe un spațiu Hilbert H al funcțiilor Φ în care clasa C este înglobată, un operator integral T care satisface

$$(T\Phi)_i = \int_R \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(r,s)\, \Phi_j(s)\, \mathrm{d}V_s, \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{7.23}$$

unde K_{ij} este un nucleu integral, analog lui G_j, cu proprietățile

$$\begin{aligned} &K_{ij}(r,s) \geqslant 0, \\ &\sum_{i,j} \iint_{R\times R} |K_{ij}(r,s)|^2\, \mathrm{d}V_r\, \mathrm{d}V_s < \infty. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Cu aceste definiții se enunță, consecvent metodelor matematice, o teoremă de existență a operatorilor integrali pozitivi, care constituie în același timp și o teoremă, de existență a soluțiilor ecuației de transport al neutronilor.

TEOREMA 1. Dacă operatorul integral T este astfel definit pe spațiul Hilbert H încît pentru un p pozitiv oarecare K_{ij}^{p} este continuu, iar $K_{ij}^{p}(r, s) > 0$ pentru majoritatea valorilor $r \in M_i$ și $s \in R$ (unde M_i sînt submulțimi măsurabile ale lui R sau în limbaj fizic subregiuni ale reactorului), în timp ce pentru $r \notin M_i$, $K_{ij}^{p}(r, s) = 0$, atunci T are o valoare proprie λ_0 reală, pozitivă, simplă și mai mare decît valoarea absolută a oricărei alte valori proprii λ a lui T. Funcțiile proprii Φ_j ale lui T corespunzătoare acestei valori proprii λ_0 sînt proporționale cu o funcție proprie principală a lui T, definită de

$$\begin{cases} \Phi_j^0(r) > 0 \text{ pentru } r \in M_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ = 0 \text{ pentru alte regiuni.} \end{cases}$$

Aceste funcții proprii satisfac

$$\begin{aligned} \Phi^0(r) &= [\Phi_1^0(r), \Phi_2^0(r), \ldots, \Phi_n^0(r)], \\ |\Phi^0|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \int_{M_j} |\Phi_j^0(r)|^2 \, dV_r = 1. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Aceleași afirmații sînt valabile și pentru operatorul integral adjunct $(T^* \Psi)_i = \int_R \sum_{j=1}^{n} K_{ji}(s, r) \, \Psi_j(s) \, dV_s$, unde $(\Phi^0, \Psi^0) = 1$.

Pentru determinarea dependenței valorii proprii λ_0, a funcțiilor Φ^0 și a adjunctelor Ψ^0 de nucleul integral $K_{ij}(r, s)$, mai este necesară o teoremă de perturbație:

TEOREMA 2. Dacă nucleul integral K din teorema precedentă depinde de un parametru α astfel încît satisface toate condițiile acelei teoreme pentru orice α vecin cu α_0, ceea ce se exprimă matematic prin

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{R \times R} |K_{ij}(r, s; \alpha) - K_{ij}(r, s; \alpha_0)|^2 \, dV_r \, dV_s = 0, \tag{7.26}$$

atunci valoarea proprie λ_0 furnizată de teorema 1 pentru $K(r, s, \alpha)$ va fi continuă pentru $\alpha = \alpha_0$, iar funcția proprie $\Phi_\alpha^0(r)$ și adjuncta ei $\Psi_\alpha^0(r)$ vor fi continue în α_0. Și convergența acestor funcții va fi uniformă în r dacă nucleul $K(r, s, \alpha)$ e continuu în ambele variabile simultan.

Pentru exemplificarea aplicabilității acestor teoreme se va studia ecuația de transport staționară (independentă de timp), dată de (7.21). Termenul A, reprezentat de o matrice pătrată în aproximația multigrup, poate fi descompus în două componente $A = L + U$, reprezentate de cîte o matrice inferior și respectiv superior triunghiulară.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul mai simplu $U \equiv 0$, în care elementele matricei superior triunghiulare sînt nule, adică nu există împrăştieri de neutroni de la energii mici spre energii superioare, ecuaţia de transport ia forma

$$-(D + L)\,\Phi(r) = \nu F \Phi(r). \tag{7.27}$$

După verificarea autoadjunctivităţii operatorului $(D + L)$ faţă de componentele lui $\Phi \in C$ şi după stabilirea faptului că el posedă o funcţie Green g care implică

$$-(D_j + a_{jj})^{-1} = \int_R g_j(r, s)\,\mathrm{d}V_s,$$

se deduce uşor că $-(D + L)$ are o inversă, care permite rescrierea ecuaţiei (7.27) sub forma

$$-F(D + L)^{-1}\,\Phi = \lambda\Phi, \quad \lambda = 1/\nu,$$

care este o ecuaţie caracteristică şi deci posedă proprietăţile stabilite de teorema 1.

În mod analog se formulează şi problemele de dependenţă temporală pentru care mai sînt necesare o serie de teoreme, deduse de asemenea în lucrarea citată.

BIBLIOGRAFIE

B—1 Birkhoff G., Proc. Symp. Appl. Math., **II**, 155 (1961); **XI**, 116 (1961).
B—2 Birkhoff G. et al., J. Soc. Ind. Appl. Math., **6**, 354 (1958).
H—1 Habetler G. J. et al., Proc. Sympl. Appl. Math., **XI**, 127 (1961).
H—2 Hall . S., Ann. of Phys., **20**, 382 (1962).
I —1 Ingarden R. S., Bull. Acad. Polon. Sci., **11**, 541 (1963).
K—1 Kato T., J. Math. Soc. Japan, **5**, 208 (1953).
K—2 Koskinen H., PICG, P/842 (1964).
M—1 Marek I., PICG, P/632 (1964).
P—1 Proc. Symp. Appl. Math., **XI** (1961).
R—1 Reed K. W. jr., J. Math. Anal. Appl., **10**, 161 (1965).
R—2 Reed K. W. jr., Thesis, New York Univ., 1963.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 8

Aproximaţii stohastice ale transportului neutronilor

Oricărui sistem fizic macroscopic i se pot asocia modele microscopice cu ajutorul cărora cercetătorii pot aprofunda studiul aspectelor celor mai fine ale proceselor şi fenomenelor pe care acest sistem le suferă.

Dar, cînd dimensiunile sistemelor fizice macroscopice scad, mărimile observabile ce le caracterizează prezintă fluctuaţii, care depind atît de natura proceselor pe care le suferă, cît mai ales de modelele microscopice alese. Din această cauză, mărimile fizice macroscopice devin mărimi stohastice (aleatoare), a căror evoluţie este guvernată de ecuaţii diferenţiale stohastice. Acestea nu pot fi deduse din ecuaţiile clasice ale diverselor procese fizice, care se obţin de obicei ca bilanţuri macroscopice de energie, de masă, de cantitate de mişcare etc., ci din analiza modelelor microscopice sau din bilanţurile caracteristice acestui nivel. Aceasta se datoreşte şi faptului că anumiţi termeni ai ecuaţiilor care prezintă fluctuaţii stohastice la nivel microscopic pot fi nuli în medie.

Deci aceşti termeni apar în ecuaţiile stohastice, dar lipsesc în cele clasice macroscopice, care se bazează pe valori medii şi deci contribuie la o scădere a cantităţii de informaţie a ecuaţiilor macroscopice faţă de cele stohastice.

Teoria proceselor stohastice s-a dezvoltat vertiginos în ultimele decenii, permiţînd abordarea unor domenii din ce în ce mai întinse din fizică, chimie, biologie, tehnică etc. [I—1]. Fizica reactorilor nucleari reprezintă unul dintre domeniile care au profitat cel mai mult de această dezvoltare, atît prin obţinerea de rezultate şi formulări principial noi, care au pus în evidenţă aspecte nebănuite, cît şi printr-o analiză mai aprofundată a rezultatelor clasice [O—1].

Tratarea stohastică s-a dovedit mai utilă în problemele legate de fluctuaţiile distribuţiilor de neutroni în reactori, de studiul reactorilor pulsaţi, de calcularea criticităţii la reactorii obişnuiţi (celulele reţelelor eterogene), la problemele legate de pornirea reactorilor cu surse slabe, la luarea în considerare a neutronilor întîrziaţi, a otrăvirii cu produsele de fisiune şi mai ales la analiza aprofundată a înseşi bazelor teoriei transportului neutronilor şi a legăturilor ei cu alte teorii.

În acest scop au fost create teorii stohastice noi sau au fost adoptate teorii stohastice cunoscute din alte domenii analoge, cum sînt cele referitoare la procesele în cascadă ale radiaţiilor cosmice, la încetinirea par-

Scanned with OKEN Scanner

ticulelor cosmice în emulsiile nucleare sau la teoria populațiilor multiplicative (biologie, sociologie etc.).

Una dintre primele aplicații ale metodelor stohastice în fizica neutronilor a fost efectuată de Fermi [F—1] încă din 1936 (cînd încă nu putem vorbi de o fizică a reactorilor), care a dedus distanța pătratică medie $\overline{r^2}(E)$ necesară neutronilor a fi încetiniți pînă la energia E într-un moderator hidrogenoid (mărime cunoscută acum în fizica reactorilor sub denumirea de lungime de încetinire a neutronilor).

Printre formulările stohastice cele mai utilizate la studiul transportului neutronilor se remarcă:

a) metoda funcțiilor generatoare ale distribuțiilor de probabilitate [B—1], [B—2], [B—3], [P—1];

b) metoda funcționalelor stohastice (aleatoare) [L—1];

c) metoda mersului la întîmplare (a împrăștierii multiple) [G—1], [G—2], [G—3], [R—1], [R—2], [W—2];

d) metoda numerică Monte-Carlo (vezi § 9.4).

Întrucît funcțiile generatoare reprezintă un caz particular al metodei funcțiilor caracteristice, fundamentale în teoria ecuațiilor diferențiale și integrale, ne găsim în prezența unei legături analitice profunde între aproximația stohastică și cea clasică în cazul oricărui proces fizic care, asemenea transportului neutronilor, poate fi tratat prin amîndouă.

Este important de subliniat că fiecare dintre aceste metode are limitări: prin funcții generatoare se pot studia reacția de fisiune în lanț, termalizarea neutronilor și deduce diversele distribuții neutronice, în timp ce fără funcții generatoare se pot aborda probleme de mers la întîmplare, fluctuații etc.

Trecerea la modelul microscopic în teoria transportului neutronilor, guvernată de ecuația lui Boltzmann, care reprezintă bilanțul macroscopic al neutronilor din reactor, se efectuează prin renunțarea la acest bilanț din elementul de volum și înlocuirea lui prin urmărirea analitică a fiecărui neutron în parte, prin intermediul probabilităților pe care acesta le are de a suferi anumite procese tipice în reactor (fisiune, absorbție, împrăștiere etc.).

Această tratare independentă a fiecărui neutron e posibilă datorită independenței proceselor neutronice individuale (fisiunea unui nucleu de către un neutron este independentă de un alt proces asemănător provocat de alt neutron, iar absorbția și împrăștierea lor de asemenea etc.).

Cititorii interesați în aprofundarea acestor aspecte pot folosi lucrările indicate la sfîrșitul acestui capitol.

În bibliografia [R—3] mai sînt însă indicate peste 230 de lucrări de specialitate apărute pînă în 1966 și dedicate tratării prin metodele stohastice atît a problemelor din teoria transportului neutronilor, cît și a altor probleme conexe din teoria mai generală a fizicii și chiar tehnicii reactorilor nucleari.

Scanned with OKEN Scanner

8.1. Aproximația mersului la întîmplare (a „împrăștierii multiple")

O metodă stohastică elementară de a determina distribuția neutronilor într-un reactor nuclear și care nu pornește de la ecuația lui Boltzmann este metoda mersului la întîmplare (numită în literatura de specialitate și metoda împrăștierii multiple) [G—1], [G—2], [G—3], [R—1], [R—2], [W—1].

În loc de a face bilanțul neutronilor dintr-un volum dat al reactorului și a scrie ecuația de continuitate care duce la teoria clasică a transportului neutronilor, se urmărește mișcarea fiecărui neutron după ciocnirile succesive pe care le suferă de la generarea lui de către sursă pînă la absorbția sau scăparea lui în exterior.

Se presupune că traiectoriile neutronilor între ciocniri sînt rectilinii, că vitezele lor sînt constante, iar în cazul împrăștierii izotrope că direcțiile lor sînt mărimi aleatoare. Mersul la întîmplare poate fi interpretat ca o aproximație grosolană a difuziei monodimensionale sau a mișcării browniene într-o singură dimensiune a unei particule supuse unui mare număr de ciocniri, care îi impun fie mișcări la întîmplare, fie participarea la anumite procese tipice (în cazul reactorului procese neutronice de împrăștiere, fisiune, absorbție etc.).

Mersul la întîmplare este ușor de pus în ecuații simple, algebrice, pînă ce particulele ajung la o barieră (interfețe între regiuni, margini etc.) cînd tratamentul analitic devine mai dificil, fiind caracterizat în continuare prin ecuații diferențiale.

Prin urmare, mersul la întîmplare constituie o succesiune de „evenimente" elementare statistic independente pe care le suferă un sistem (în acest caz sistemul reprezentat de reactor și neutroni) și în urma cărora acesta își schimbă starea. Fiecare „pas" al acestui mers la întîmplare, constituit dintr-o ciocnire și deplasarea ce urmează, reprezintă un astfel de eveniment elementar.

Mersul la întîmplare poate fi considerat un proces stohastic datorită faptului că fiecare „pas" nu depinde decît de pasul precedent. Deci el este un caz particular de lanț Markov.

Dacă sînt luate în considerare și probabilitățile de „naștere" și de „moarte" ale neutronilor, se obține teoria proceselor multiplicative, care constituie de asemenea un caz particular de procese stohastice, inclus în categoria lanțurilor Markov.

În cazul particular al mersului la întîmplare într-o singură direcție se obține tot un proces stohastic, cunoscut sub denumirea de proces de reînnoire („renewal") [W—2].

Noua aproximație are și avantajul de a permite luarea în considerare a unor probleme foarte restrînse. Astfel, dacă ne interesează de exemplu, doar distribuția vitezelor neutronilor după un număr dat de ciocniri, putem renunța la formularea indirectă prin intermediul coor-

Scanned with OKEN Scanner

donatelor de poziție, considerînd drept evenimente elementare doar schimbările vectorului viteză neutronică datorite ciocnirilor.

Calitatea pe care o are un astfel de mers la întîmplare de a reprezenta un proces stohastic de tip Markov, deoarece un „pas" (o stare a sistemului) nu depinde decît de pasul precedent (de starea precedentă a sistemului), se traduce matematic prin obținerea unei relații de recurență între termenii n și $(n+1)$ ai mersului la întîmplare (de fapt între distribuțiile de probabilitate ale stărilor neutronice respective).

Între această relație de recurență care caracterizează noua aproximație a mersului la întîmplare și teoria clasică a lui Boltzmann a transportului neutronilor în forma integrală s-au stabilit legături remarcabile prin care s-a dovedit că ecuația mersului la întîmplare conține o mai mare cantitate de informație despre transportul neutronilor în reactor.

Astfel, dacă în aproximația mersului la întîmplare mărimea esențială de determinat este probabilitatea $f_n(s)$ pentru ca un neutron, mergînd la întîmplare, să parcurgă „distanța" s (nu numai în spațiu, ci și în energie, timp și direcție, deoarece variabila s reprezintă un punct în spațiul 7-dimensional s $(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t)$ după n pași, aceeași mărime, exprimată de teoria lui Boltzmann ca o funcție de distribuție $f(s)$, este legată de prima prin

$$f(s)_{\text{Boltz.}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(s), \tag{8.1}$$

ceea ce demonstrează caracterul relativ mai limitat al expresiei din teoria lui Boltzmann.

În cazul general, relația de recurență amintită se poate deduce destul de ușor: dacă mersul la întîmplare are loc în intervalul (a, b), iar $P(s' \to s)$ reprezintă probabilitatea ca un „pas" să schimbe starea neutronului de la s' la s (se presupune că această probabilitate depinde doar de $s' \to s$), atunci distribuția probabilității pentru starea $(n+1)$ va fi dată în funcție de cea a stării n și prin relația

$$f_{n+1}(s) = \int_a^b f_n(s)\, P(s \to s')\, ds, \tag{8.2}$$

în care f_0 și $P(s' \to s)$ sînt date. Legătura dintre relația de recurență a mersului la întîmplare și expresia integrală a teoriei transportului neutronilor, exprimată parțial de (8.1), se dovedește mai profundă, deoarece sumarea relației de recurență pe n și folosirea definiției

$$f(s') = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(s') \tag{8.3}$$

conduce la o ecuație integrală de tip Fredholm, analogă ecuației integrale Boltzmann :

$$f(s') = f_0(s') + \int_a^b f(s)\, P(s' \to s)\, ds. \tag{8.4}$$

Explicitînd expresia probabilității unei particule (neutron) de a trece de la starea $s(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ la starea $s'(\mathbf{r}', E', \Omega', t')$ în urma unei ciocniri și deplasări prin

$$P(\mathbf{r}', E', \Omega', t' \to \mathbf{r}, E, \Omega, t) = \Sigma_s(\mathbf{r}'; \Omega', E' \to$$

$$\to \Omega, E)\, e^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}';\, E)}\, \delta\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \Omega\right) \delta\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v} - (t \to t')\right), \tag{8.5}$$

unde

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}';\, E) = \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(E;\, \mathbf{r}' + \rho\Omega)\, d\rho,$$

Σ_s — probabilitatea de ciocnire în $(\mathbf{r}', E', \Omega')$ care conduce la $(\mathbf{r}, E, \Omega)$,

Σ_t — probabilitatea tuturor proceselor posibile,

și introducînd-o în (8.4), se obține ecuația integrală Boltzmann în forma clasică.

În aproximația mersului la întîmplare, mișcarea neutronilor poate fi urmărită fie analitic [G—1], [G—3], [R—1], [W—1], prin deducerea cu ajutorul metodelor fizicii statistice (teoria lanțurilor Markov) a unor expresii corecte pentru principalele mărimi neutronice caracteristice reactorului, fie numeric, prin metoda Monte-Carlo, folosită la mașini electronice de calcul cu viteză și memorie mari.

O aplicație directă a acestei metode este folosită de Grosjean [G—1] la determinarea densității de neutroni într-un mediu infinit și în condiții date.

În această aplicație se consideră în origine o sursă punctiformă anizotropă de neutroni în mediu cu împrăștiere izotropă, care emite pe secundă, între α și $\alpha + d\alpha$, un număr de neutroni dat de

$$f(\mathbf{r}, E, \Omega, t) = \int_0^\infty ds \left[\int f(\mathbf{r} - s\Omega, t - s/v, E', \Omega')\, ds\, \Sigma_s(\mathbf{r} - s\Omega, \Omega', E' \to \Omega, E) + \right. \tag{8.6}$$

$$\left. + S(\mathbf{r} - s\Omega, \Omega, E, t - s/v)\right] \exp\left[-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r} - s\Omega, E)\right].$$

Rezultă deci că distribuția de probabilitate f reprezintă de fapt numărul de neutroni în unitatea de interval s după cei n pași ai mersului

la întîmplare, adică după cele n evenimente (procese nucleare) suferite de ei :

$$S_0(1 + A \cos \alpha) \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{2}, \tag{8.7}$$

unde S_0 este intensitatea totală a sursei.

Acești neutroni difuzează în mediu, suferind ciocniri. Se definește $f(l)\,dl$ ca fiind probabilitatea elementară ca după o ciocnire neutronul să se deplaseze pe o distanță cuprinsă între l și $l + dl$, după care se va ciocni din nou.

În cazul izotrop, $f(l)$ e complet arbitrar (aleator).

Această probabilitate trebuie totuși să îndeplinească condițiile

$$\int_0^\infty f(l)\, dl = 1, \tag{8.8}$$

în cazul absorbției nule (adică neutronii se conservă), și

$$\int_0^\infty f(l)\, dl < 1, \tag{8.9}$$

cînd neutronii nu se conservă datorită absorbțiilor.

Pentru neutronii termici este satisfăcută și relația

$$f(l)\, dl = \exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right) \frac{dl}{\lambda_s}, \tag{8.10}$$

unde

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_c}.$$

Autorul mai definește următoarele probabilități necesare în demonstrarea metodei :

$$p(\gamma) \frac{\sin \gamma \, d\gamma}{2} = (1 + 3b \cos \gamma) \frac{\sin \gamma \, d\gamma}{2}, \tag{8.11}$$

probabilitatea ca un neutron să fie deviat cu un unghi cuprins între γ și $\gamma + d\gamma$ în urma unei ciocniri împrăștiante ;

$$\varphi_n(r, \alpha ; \xi, \nu)\, dr \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{2} \frac{\sin \xi \, d\xi \, d\nu}{4\pi}, \tag{8.12}$$

probabilitatea ca un neutron să sufere cea de-a n-a ciocnire împrăștiantă în elementul de volum $(r, r + dr)$ $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ [care de fapt reprezintă o pătură cilindrică] dacă înaintea

acestei ciocniri direcția sa era cuprinsă în unghiul solid definit de $(\xi, \xi + d\xi)(\nu, \nu + d\nu)$;

$$\psi_n(r, \alpha; \xi, \nu)\, dr \frac{\sin \alpha\, d\alpha}{2} \frac{\sin \xi\, d\xi\, d\nu}{4\pi}, \tag{8.13}$$

probabilitatea ca un neutron să sufere cea de-a n-a ciocnire împrăștiantă în elementul de volum $(r, r + dr)(\alpha, \alpha + d\alpha)$, după care direcția sa va fi cuprinsă în unghiul solid definit de $(\xi, \xi + d\xi)(\nu, \nu + d\nu)$.

Problema ce trebuie rezolvată este deci de a găsi expresiile acestor probabilități după n ciocniri ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) ale neutronilor și de a le suma pentru a obține funcțiile

$$\Phi(r, \alpha; \xi, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, \alpha; \xi, \nu),$$

$$\Psi(r, \alpha; \xi, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r, \alpha; \xi, \nu). \tag{8.14}$$

Densitatea neutronilor $\rho(r, \alpha)$ va fi dată de

$$\rho(r, \alpha) = \frac{S_0 \lambda_s}{4 \pi v r^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(r, \alpha; \xi, \nu) \frac{\sin \xi\, d\xi}{2}. \tag{8.15}$$

Esențialul în deducerea acestei ecuații de transport prin metoda mersului la întîmplare îl constituie obținerea relațiilor de recurență ce definesc succesiunea probabilităților φ_n și ψ_n, care reprezintă matematic procesul fizic al mersului „la întîmplare" al neutronilor. Aceste relații de recurență sînt deduse în lucrarea citată din considerente geometrice și fizice prin folosirea unor dezvoltări în armonici sferice.

În lucrarea citată, folosind aproximări corespunzătoare cazului $r \gg \lambda$, se găsește pentru densitatea neutronilor expresia

$$\rho(r, \alpha) \simeq \frac{S_0 \lambda_c}{4 \pi v L^2} \frac{\exp(-r/L)}{r} + \frac{S_1 \cos \alpha}{4 \pi v L} \frac{\exp(-r/L)}{r} \left(1 + \frac{L}{r}\right), \tag{8.16}$$

care se vede că are chiar forma soluției ecuației de difuzie

$$D \nabla^2 \rho - \frac{v \rho}{\lambda_c} = 0. \tag{8.17}$$

Prin comparare se deduce

$$D = \frac{\lambda v}{3\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s} \overline{\cos \gamma}\right)} = \frac{\lambda_{tr} v}{3}; \quad L^2 = \frac{\lambda_{tr} \lambda_c}{3}, \tag{8.18}$$

unde

$$\lambda_{tr}(\text{MÎ}) = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\overline{\cos\gamma}\right)} = \frac{\lambda_s}{\left(1 + \frac{\lambda_s}{\lambda_c} - \overline{\cos\gamma}\right)}\ ;\ (\text{MÎ}) = \text{mersul la întîmplare,} \tag{8.19}$$

în timp ce definiția de transport a lui λ_{tr} este

$$\lambda_{tr}(\text{As}) = \frac{\lambda_s}{(1 - \overline{\cos\gamma})}\ ;\ (\text{As}) = \text{asimptotic.} \tag{8.20}$$

Deoarece însă $\frac{\lambda_s}{\lambda_c} \ll 1$, de obicei cele două expresii sînt echivalente.

Introducînd alte aproximații în calculul lui $\Phi(r, \alpha; \xi, \nu)$ pentru a ține seama și de cazurile $r \approx \lambda$, autorul găsește

$$\rho(r, \alpha) \simeq \frac{S_0}{4\pi v}\frac{\exp(-r/\lambda)}{r^2} + \frac{S_0\,\lambda_c\,\lambda}{4\,\pi v\lambda_s\,L'^2}\frac{\exp(-r/L')}{r} + \\ + \left(1 + \frac{L}{r}\right)\frac{S_1\cos\alpha}{4\,\pi vL}\frac{\exp(-r/L)}{r}, \tag{8.21}$$

din care, tot prin comparare, se deduce

$$L^2 = \frac{\lambda\lambda_c}{3\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\overline{\cos\gamma}\right)}, \tag{8.22}$$

$$L'^2 = \frac{\lambda\lambda_c}{3\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\overline{\cos\gamma}\right)}\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda_c} + \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\overline{\cos\gamma}\right]. \tag{8.23}$$

Expresia lui L' (8.23) pentru lungimea de difuzie este mult mai apropiată de definiția de transport a ei.

În cazul sursei punctiforme izotrope, cînd $S_1 = 0$, și al împrăștierii izotrope $(\overline{\cos\gamma} = 0)$, soluția (8.21) se reduce la doi termeni și deci, tot prin comparare:

$$L'^2 = \frac{\lambda\,\lambda_c}{3}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_c}\right). \tag{8.24}$$

Notînd $\frac{\lambda}{\lambda_s} = c$, se obțin și alte forme ale expresiilor de mai sus:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{S_0}{4\pi v}\frac{\exp(-r/\lambda)}{r} + \frac{S_0\,\lambda\,\lambda_c}{4\,\pi v\lambda_s\,L'^2}\frac{\exp(-r/L')}{r} \tag{8.25}$$

sau, folosind (8.24),

$$\rho(r) = \frac{S_0}{4\pi r^2 v}\left[\exp(-r/\lambda) + \frac{3c}{2-c}\,\frac{r}{\lambda}\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\left(\frac{3(1-c)}{2-c}\right)^{1/2}\right)\right], \qquad (8.26)$$

unde c poate varia doar între 0 și 1, căci pentru $c > 1$ nu mai este posibilă o soluție staționară finită. Comparînd (8.26) cu soluția exactă dată de Case [C—1], în care exponențiala are forma $\left(-\frac{r}{\lambda}K\right)$, rezultă

$$K(c) = \left(\frac{3(1-c)}{2-c}\right)^{1/2} \quad \text{sau} \quad c = \frac{K}{\operatorname{arc\,tg} K} \qquad (8.27)$$

sau

$$\frac{K(c)}{\sqrt{3(1-c)}} = (2-c) = \left[1 - \frac{1}{2}(1-c) + \frac{3}{8}(1-c)^2 + \ldots\right], \qquad (8.28)$$

față de aproximația difuziei elementare,

$$\frac{K(c)}{\sqrt{3(1-c)}} = 1, \qquad (8.29)$$

sau față de soluția exactă de transport:

$$\frac{K(c)}{\sqrt{3(1-c)}} = \left[1 - \frac{2}{5}(1-c) - \frac{12}{175}(1-c)^2 \ldots\right]. \qquad (8.30)$$

Deci în noua aproximație se folosesc relațiile (8.26), (8.27) și cele derivate din ele:

$$L = \lambda/K; \quad D = \frac{v\lambda(1-c)}{K^2}. \qquad (8.31)$$

Alte proprietăți ale soluției (8.26) sînt:

a) permite obținerea valorilor riguroase ale momentelor, de exemplu

$$\int_0^\infty r^2 \rho(r)\,dr = \frac{\lambda}{(1-c)};$$

b) este riguroasă în cazul $c = 0$;

c) în cazul $c = 1$ devine

$$\rho(r) = \frac{S_0}{4\pi v r^2}\left[\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) + 3\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right];$$

Scanned with OKEN Scanner

d) în jurul originii și pentru orice valoare a lui c, soluția riguroasă se comportă ca

$$\left[1 - \frac{r}{\lambda}\left(1 - \frac{\pi\omega^2}{4}\right)\right],$$

în timp ce soluția (8.26) se comportă ca

$$\left[1 - \frac{r}{\lambda}\left(1 - \frac{3\,\omega^2}{2 - \omega}\right)\right].$$

Curbele au aceeași alură, pentru că $c = 2 - \frac{12}{\pi^2}$, dar (8.26) este mai mic pentru $0 < c < 2 - \frac{12}{\pi^2}$ și mai mare pentru $2 - \frac{12}{\pi^2} < c \leqslant 1$.

Relațiile acestei aproximații se aplică bine pentru orice $c < 1$ și r, spre deosebire de orice alte aproximații ale soluției riguroase de tipul celei date de Case [C—1] și care sînt limitate la anumite valori ale lui c și r.

În cazul cu sursă se găsește

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_d(\mathbf{r}) + \rho_s(\mathbf{r}), \tag{8.32}$$

unde $\rho_s(\mathbf{r})$ satisface ecuația de tip

$$\nabla^2 \rho_s(\mathbf{r}) - \frac{3}{\lambda^2}\left(\frac{1-c}{2-c}\right)\rho_s(\mathbf{r}) + \frac{3c}{(2-c)}\,\frac{S(\mathbf{r})}{v\lambda} = 0, \tag{8.33}$$

care diferă de ecuația aproximației de difuzie pentru neutroni prin faptul că L este înlocuit cu (8.31); termenul-sursă se înmulțește cu $\frac{c}{2-c}$, iar densitatea totală de neutroni $\rho(\mathbf{r})$ se înlocuiește cu $\rho_s(\mathbf{r})$.

În cazul absorbției mici ($c \simeq 1$), diferențele sînt mici.

Principalul dezavantaj al noii aproximații este că în cazul $c > 1$ soluția nu mai este suficient de exactă.

Autorul a extins-o însă [G—1] și la medii cu împrăștieri anizotrope și mai ales la medii finite, la care este necesară cunoașterea nu numai a distribuției de neutroni, ci și a curentului de neutroni pentru formularea condițiilor la margine.

Extinderea metodei pentru a furniza corect și soluția pentru cazul $c > 1$ este făcută în lucrarea lui Rowlands [R—1], cu restul condițiilor identice (sursă plană izotropă în mediu infinit omogen cu împrăștiere izotropă).

Se folosește separarea soluției ecuației Boltzmann în două componente (deci la bază este o aproximație asimptotică), iar soluția pro-

priu-zisă în cazul sursei izotrope plane în mediu infinit cu împrăştiere izotropă se obţine prin transformate Fourier :

$$\mu \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{l} = S(x, \mu) + \frac{c}{l} \sum_{n=0} \frac{2n+1}{4\pi} b_n \psi_n(x) P_n(\mu). \tag{8.34}$$

Se găseşte

$$\psi(x) = \frac{S_0 l(L^2 - l^2)}{Lc(L^2 c + l^2 - L^2)} e^{-|x|/L} + X(x), \tag{8.35}$$

unde, ca de obicei, $\frac{1}{c} = \frac{L}{2l} \frac{L+l}{L-l}$.

Se găseşte că $X(x) \simeq e^{-x/l}$ şi deci pentru $c \simeq 1$ sau $L \gg l$ şi $x > 3l$ acest termen poate fi neglijat faţă de primul termen (rezultatele au fost deja deduse în aproximaţia asimptotică a difuziei). Iar primul termen este o soluţie a ecuaţiei

$$\left[D \frac{d^2}{dx^2} - \frac{(1-c)}{l} \right] \psi(x) = - A S_0(x), \tag{8.36}$$

unde pentru c oarecare :

$$D = \frac{(1-c) L^2}{l} \quad \text{şi} \quad A = \frac{2(L^2 - l^2)(1-c)}{c(L^2 c - L^2 + l^2)}, \tag{8.37}$$

iar pentru $c \simeq 1$:

$$D \simeq \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad A \simeq 1 \text{ (în unităţi de } l).$$

Acestea sînt de fapt cunoscutele rezultate ale aproximaţiei asimptotice de difuzie. Pentru a obţine rezultate mai corecte şi aplicabile şi la $c > 1$, trebuie să ne îndreptăm atenţia în special la regiunile de lîngă surse şi la $c > 1$.

Lîngă sursă, contribuţia majoră va veni din partea neutronilor care nu au suferit încă ciocniri. Această contribuţie se calculează tot cu ecuaţia (8.34), dar pentru $c = 0$ (adică împrăştiere nulă).

În continuare, pentru c mic, adică pentru împrăştieri puţine (ciocniri puţine) contribuţia majoră la fluxul neutronic din orice punct mai depărtat de sursă va fi dată de neutronii care au suferit cîteva ciocniri (puţine căci c e mic). Această din urmă contribuţie este bine reprezentată de o soluţie obişnuită de difuzie (care e corectă în acest caz al depărtării de sursă şi $c < 1$).

Se foloseşte atunci descompunerea fluxului în

$$\Phi_0(x) = \Phi_{0,\text{dif}}(x) + \Phi_{0,s}(x), \tag{8.38}$$

unde $\Phi_{0,s}(x)$ este contribuţia neutronilor care nu au suferit încă ciocniri, deci foarte apropiaţi de sursă.

Folosind metoda transformatelor Fourier, se găsește că această contribuție are forma

$$\Phi_{0,s}(x) = \frac{S_0}{2} E_1\left(\frac{|x|}{l}\right), \tag{8.39}$$

unde

$$E_n \equiv \int_1^\infty \mathrm{e}^{-xt} t^{-n}\, \mathrm{d}t \tag{8.40}$$

este integrala exponențială de ordin n.

Final ecuația (8.38) devine

$$\Phi_0(x) = \frac{cl\, S_0}{[2(1-c)\, L]} \mathrm{e}^{-|x|/L} + \frac{S_0}{2} E_1\left(\frac{|x|}{l}\right), \tag{8.41}$$

care nu e altceva decît o formă îmbunătățită pentru expresia (8.35) (deși în (8.35) s-a neglijat termenul $X(x)$).

Dacă metoda aplicată mai sus asupra lui $\Phi_0(x)$ (ecuația (8.38)) se aplică lui $\Phi_{0,\,\mathrm{dif}}(x)$, se regăsește rezultatul din lucrarea [G—1], după care $\Phi_{0,\,\mathrm{dif}}(x)$ satisface o ecuație de tipul (8.36), dar cu alte valori:

$$D = \frac{(2-c)\, l}{3} \quad \text{și} \quad A = c. \tag{8.42}$$

Întrucît ecuația (8.41) reprezintă o soluție de tipul celei obținute de Grosjean plus un termen de difuzie, rezultă că o îmbunătățire a fluxului calculat prin aproximația mersului la întîmplare se poate obține prin adăugarea unui termen de difuzie. Acest termen ar reprezenta o aproximație a termenilor de ordin mai mare neglijați în metoda amintită.

Tot Rowlands mai găsește o altă îmbunătățire a acestei aproximații, folosind metoda variațională. Expresia pentru flux este tot (8.41), dar cu parametrii obținuți variațional:

$$\begin{aligned} c &= [4F(\lambda) - 1] \Big/ \left[4F(\lambda) - \frac{1+2\lambda}{(1+\lambda)^2}\right], \\ \lambda &= l/L, \\ F(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2}\left[T(2) - T\left(\frac{2}{1+\lambda}\right)\right] + \frac{2\ln\left(\dfrac{2}{1+\lambda}\right)}{\lambda(\lambda^2-1)}, \\ T(x) &= \int_1^x \frac{\ln y\, \mathrm{d}y}{y-1}. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Soluția (8.41) este mai bună cu L dat de Grosjean în cazul $c < 1{,}0$, în timp ce cu L dat de (8.35) aproximația asimptotică este mai corectă cu $c > 0{,}9$. Cînd x/l tinde către infinit, soluția (8.41) tinde către soluția aproximației asimptotice.

O altă aproximație, bazată tot pe metoda mersului la întîmplare (împrăștiere multiplă), a fost dată de Richards [R—2].

Mărginindu-se tot la mediu infinit cu împrăștiere izotropă cu sursă izotropă, el pornește de la forma integrală a ecuației de transport, pe care o dezvoltă în serie de forma

$$\rho = \rho_d + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^2 \nabla^2)^n \frac{c\rho}{2n+1}, \tag{8.44}$$

care satisface o ecuație de difuzie cu sursa de forma $\rho v/\lambda$.

Pentru convergența mai rapidă a seriei (8.44), el introduce în ambii membri ai ecuației operatorul $(\lambda^2 \nabla^2 - 1)$, ceea ce conduce la ecuația

$$\lambda^2 \nabla^2 \frac{(3-2c)}{3} \rho - (1-c)\rho = (\lambda^2 \nabla^2 - 1)\rho_d + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda^2 \nabla^2) \frac{cl}{4n^2-1}, \tag{8.45}$$

mai corectă decît ecuația de difuzie și în care coeficienții de ordin mai înalt scad mult mai rapid decît în (8.44) și pot fi deci neglijați. Ecuația (8.45) se poate simplifica, introducînd notația

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3(P(\mathbf{r}) + \rho_d(\mathbf{r})]}{[3 - 2\,c(\mathbf{r})]} \tag{8.46}$$

și renunțînd la termenul-sursă. Se obține

$$\lambda^2 \nabla^2 P(\mathbf{r}) - \left[\frac{3(1-c)}{(3-2c)}\right] P(\mathbf{r}) = \frac{c}{(3-2c)} \rho_d(\mathbf{r}), \tag{8.47}$$

care se mai poate scrie

$$\lambda^2 \nabla^2 P(\mathbf{r}) - K^2 P(\mathbf{r}) = -(1-K^2)\rho_d(\mathbf{r}). \tag{8.48}$$

Deci, în această aproximație, diverșii parametri care intervin în ecuație au valorile

$$\begin{aligned}
K^2 &= \lambda^2/L^2 = \lambda^2 k^2 = \frac{3(1-c)}{(3-2c)}, \\
K^2_{\text{dif}} &= 3(1-c), \\
K^1_{[G-1]} &= \frac{3(1-c)}{(2-c)}, \\
K^2_{\text{As}} &= c\,\text{tgh}^{-1} K^2(c), \\
K^2_{\text{exact}} &= 3(1-c)\left[1 - \frac{2}{5}(1-c)\ldots\right], \\
D &= \frac{(3-2c)}{3} \text{ (în unități de } l).
\end{aligned} \tag{8.49}$$

Totuşi, spre deosebire de alte aproximaţii amintite, la care introducerea parametrilor lor în aproximaţia elementară a difuziei ducea la rezultate mai corecte, parametrii obţinuţi în varianta lui Richards a aproximaţiei mersului la întîmplare, introduşi în aproximaţia difuziei, dau rezultate mai slabe. Aceşti parametri trebuie deci folosiţi doar în cadrul aproximaţiei lui. Diferenţele sînt mari la $c < 1$. Astfel, la $c = 0{,}3$, aproximaţia elementară a difuziei, care dă un K cu o eroare de 45%, duce totuşi la un rezultat mai corect decît prin folosirea lui K din aproximaţia lui Richards, care este mult mai corect. Aceste afirmaţii sînt valabile pentru valori mici ale lui c, în timp ce pentru K mare este valabilă afirmaţia inversă.

În tabela 8.1 sînt comparate rezultatele calculului distanţei de extrapolare liniare $d\,(c)$ prin diversele aproximaţii amintite.

TABELA 8.1

c	$cd\,(c)$			
	Exact	P_1	Richards	Asimpt.
0	1	0	0	1
0,1	0,8539	0,1107	0,2393	1
0,5	0,7200	0,3598	0,7604	1
1	0,7104	0,57..	1,0000	1
1,5	0,7123	0,75..	0,0000	1
2,25	0,7199	1,0411	—	1
∞	0,7500	∞	—	1

În aceste cîteva pagini dedicate aplicării metodei stohastice a mersului la întîmplare la transportul neutronilor, nu au fost nici pe departe epuizate multitudinea de aspecte şi de rezultate acumulate de aceasta. Pe lîngă aspectul mai mult clasic al aproximaţiei expus în acest capitol, trebuie menţionate şi lucrările în care accentul este pus pe aspectul stohastic [B—3], [B—1], [H—1], [L—1], [P—1] sau pe cel al teoriei grupurilor [G—2], [W—1].

8.2. Metoda funcţiei generatoare a distribuţiei de probabilitate

Pentru fiecare proces pe care îl poate suferi un neutron în reactor se poate defini o distribuţie de probabilitate $H(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0, t_0; t, \mathbf{R})$. Aceasta reprezintă probabilitatea ca la momentul t să existe o distribuţie a neutronilor caracterizată de vectorul de stare $\mathbf{R}$ dacă la momentul t_0 un singur neutron de energie E_0 şi direcţie $\mathbf{\Omega}_0$ se găsea în $\mathbf{r}_0$.

Determinînd distribuţiile de probabilitate ale proceselor de împrăştiere (H_s), de absorbţie (H_a) şi de fisiune (H_f) pe care le poate produce

un neutron, se obține o ecuație integrală neliniară care guvernează comportarea stohastică a neutronilor în reactor, analogă cu ecuația clasică de transport Boltzmann,

$$H = H_a + H_s + H_f + H_0, \tag{8.50}$$

unde H_0 reprezintă distribuția de probabilitate a neutronilor care nu produc nici un proces în reactor în intervalul de timp considerat.

O astfel de distribuție de probabilitate este dată de o expresie de forma (de exemplu pentru absorbție)

$$H_a = \delta_{0m}\,\delta_{0m'}\,v_0 \int_0^t \Sigma_a(\rho_0(t')\,E_0)\,\exp\left[-\sigma_0\int_0^t \Sigma_a(\rho_0(t')\,E_0)\,\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}t', \tag{8.51}$$

unde δ_{0n} sînt simbolurile Kronecker generalizate, iar

$$\rho_0(t) = (\mathbf{r}_0 + v_0 t\,\boldsymbol{\Omega}_0).$$

Practic este destul de dificilă determinarea acestor distribuții de probabilitate, și atunci se recurge la o funcție generatoare a distribuțiilor de probabilitate, definită prin

$$G(z;\ \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, H_t(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E;\ \mathbf{R}). \tag{8.52}$$

Prin înmulțirea ecuației (8.50) cu z^n și sumarea pe n se obține expresia explicită a funcției generatoare $G(z;\ \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t)$. Repetînd raționamentul și calculele pentru $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathrm{d}s\,\boldsymbol{\Omega}$ și $t' = t + \mathrm{d}s$, se obține funcția generatoare a distribuției probabilității acestei tranziții ($\mathbf{r} \to \mathbf{r}'$, $t \to t'$), notată prin $G(z;\mathbf{r} + \mathrm{d}s\,\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, E, t + \mathrm{d}s)$. Limita diferenței acestor două expresii ale funcției generatoare cînd $\mathrm{d}s \to 0$ reprezintă o ecuație integrală a funcției generatoare G analogă ecuației Boltzmann a transportului neutronilor:

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\operatorname{grad} G + \frac{\partial G}{\partial t} = \Sigma\left[G - \sum_{j=0}^{i} c_j\left(\int G'\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}'}{4\pi}\right)\right]. \tag{8.53}$$

Momentele $M_1, M_2, \ldots$ ale acestei funcții generatoare, definite ca de obicei ca derivatele de ordin I, II, ... în funcție de z, sînt deosebit de importante în tratarea stohastică a transportului neutronilor, deoarece, ca și primii doi termeni dintr-o dezvoltare în armonici sferice a fluxului direcțional, au un sens fizic bine definit. În cazul prezent, momentul M_1 definește densitatea medie a neutronilor în reactor prin relația

$$n(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t, \mathbf{R}) = \left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=1} = M_1(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t, \mathbf{R}), \tag{8.54}$$

în timp ce momentul M_2, legat de densitatea neutronilor prin

$$\overline{n(n-1)} = \left.\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right|_{z=1} = M_2(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t, \mathbf{R}), \tag{8.55}$$

defineşte fluctuaţiile distribuţiei neutronilor în reactor prin expresia

$$D^2 = M_2 - M_1^2 = n_2 - n_1^2.$$

Multitudinea de rezultate ce se mai pot obţine cu această metodă poate fi urmărită în continuare în bibliografia de specialitate, indicată la sfîrşitul capitolului.

În ceea ce priveşte metoda funcţionalei stohastice, se dovedeşte [L—1] că determinarea distribuţiei unei astfel de funcţionale este echivalentă cu determinarea distribuţiei spaţiale şi energetice a densităţii de ciocniri a neutronilor în procesul de termalizare, ceea ce deschide perspective numeroase în folosirea acestei metode în fizica reactorilor.

Recent [H—1] a fost descris un model stohastic al laticei (a nu se confunda cu reţeaua zonei active a unui reactor eterogen) în care populaţia neutronică a reactorului este „modelată" în anumite puncte ale unei latice arbitrare stohastice.

Mişcarea neutronilor este urmărită (la maşini de calcul printr-un procedeu analog, dar nu identic cu cel al metodei Monte-Carlo) între diversele puncte ale acestei latice în n direcţii de asemenea stohastice. Modelarea se repetă în fiecare punct pentru a determina procesele la care au putut lua parte neutronii sosiţi; în cazul ciocnirilor se determină tipul şi parametrii acestui eveniment. Întrucît în cadrul acestei metode se impun de la început o serie de condiţii privind energia, coordonatele şi momentul evenimentelor, se consideră problema rezolvată în momentul atingerii acestor condiţii.

BIBLIOGRAFIE

B—1 Bharucha-Reid A. T., *Elements of the theory of Markov processes*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1960.
B—2 Bell G. I., Ann. of Phys., **21**, 243 (1963).
B—3 Bell G. I., NSE, **21**, 390 (1965).
C—1 Case K. M. et al., *Introd. to the theory of neutron diffusion*, LASL, 1953.
F—1 Fermi E., Ric. Sci., **7**, 13 (1936).
G—1 Grosjean C. C., Nuovo Cimento, **9**, *11*, 11 (1954); **10**, *3*, 1262 (1956); **10**, *4*, 582 (1956); **10**, *5*, 83 (1957); PICG, **16**, 413—431 (1958).
G—2 Guth E. et al., J. Math. Phys., **2**, 451 (1961).
G—3 Guth E. et al., Phys. Rev., **118**, 899 (1960).
H—1 Hungerford H. E., Dissert., Abstr. Purdue Univ., 1965.
I—1 Iosifescu M. et al., *Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1968.
L—1 Leibowitz M. A., J. Math. Phys., **5**, 1516 (1964).
O—1 Onicescu O., *Numere şi sisteme aleatoare*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1961.
P—1 Pal L., Nuovo Cim., **X**, *7*, suppl. 1, 25 (1958).
R—1 Rowlands G., JNE, **13**, 16 (1960).
R—2 Richards P. I., Phys. Rev., **100**, 517 (1955).
R—3 Roşescu T., *Stochastic processes in nuclear reactor theory*, IFA—FR—47, 1965.
W—1 Wigner E. P., Phys. Rev., **94**, 17 (1954).
W—2 Wilkins C. A., NSE, **14**, 346 (1962).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 9

Aproximaţii numerice

Orice procedeu numeric de rezolvare a ecuaţiei de transport a neutronilor, formulată în numeroasele aproximaţii analitice ale acesteia (inclusiv cele prezentate în capitolele precedente), constituie o aproximaţie numerică.

Printre acestea se numără metode clasice, cunoscute şi din alte domenii ale fizicii matematice, ca aproximaţiile succesive (iteraţii), iteraţiile externe şi interne, metodele momentelor, ale relaxării, ale deplasărilor succesive sau simultane (cunoscute sub numele de Gauss—Seidel sau Liebmann), ale alternării direcţiei (metoda Peaceman sau Rachford), ale gradienţilor alternaţi sau ale factorizării matriceale etc. [C—2], [W—1].

Întrucît acestea nu constituie noi metode de aproximare numerică şi nu sînt specifice rezolvării ecuaţiei de transport, ele nu vor fi incluse în acest capitol. El va cuprinde însă metodele în care nu se caută o soluţie analitică a ecuaţiei de transport în vreuna dintre aproximaţiile existente care să fie apoi tratată numeric, ci în care soluţionarea este în întregime numerică şi necesită neapărat utilizarea maşinilor electronice de calcul.

Printre acestea se numără aproximaţia ordonatelor discrete (metoda Wick—Chandrasekhar) sau a segmentării unghiulare (metoda Carlson), metoda sintetică şi metoda Monte-Carlo.

9.1. Aproximaţia ordonatelor discrete (Wick-Chandrasekhar)

Pe lîngă aproximaţiile ecuaţiei de transport în care eliminarea unor variabile sau a dependenţei de ele este obţinută prin operaţii matematice efectuate asupra funcţiilor neutronice (distribuţii, fluxuri, surse, curenţi etc.), ca în cele polinomiale, există o largă categorie de aproximaţii în care eliminarea se efectuează chiar asupra variabilei prin discretizarea şi aproximarea ei în fiecare interval discret cu anumite expresii mai simple, cum este cazul metodei ordonatelor discrete.

Această metodă constă în înlocuirea variabilei unghiulare continue μ din ecuaţia de transport pentru neutroni printr-o variabilă unghiulară discretă μ_k. Ea este deci analogă cu metoda multigrup prin care se discretizează de obicei variabila energie a neutronilor din aceeaşi ecuaţie de transport.

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît variabila unghiulară μ intervine în termenul integral al ecuației de transport, este suficient a înlocui termenul respectiv prin formula de integrare a lui Gauss

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)\, d\mu = \sum_k H_k \Phi(x, \mu_k), \tag{9.1}$$

adică printr-o sumă ponderată a valorilor integrandului corespunzătoare anumitor valori discrete ale variabilei μ, pentru a asigura această discretizare în mod natural.

Această proprietate se datorește faptului că valorile discrete μ_k cu care expresia precedentă înlocuiește variabila continuă μ sînt rădăcinile ecuației $P_{N+1}(\mu) = 0$.

În aproximarea termenului integral, mărimea H_k reprezintă factorul de ponderare pentru fiecare interval k:

$$H_k = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{N+1}(\mu)}{\left[(\mu - \mu_k)\dfrac{\partial}{\partial \mu} P_{N+1}(\mu)\right]_{\mu=\mu_k}} d\mu. \tag{9.2}$$

Factorii de ponderare H_k se calculează ușor printr-o formulare matriceală. În cazul împrăștierii cu simetrie sferică se demonstrează că aproximația ordonatelor discrete coincide cu cea a armonicilor sferice [G—2], [W—2].

Discretizarea propusă a variabilei unghiulare conduce la transformarea ecuației integro-diferențiale de transport într-un sistem de ecuații diferențiale liniare, care sînt mai ușor de rezolvat la mașini de calcul.

În aproximația monoenergetică, cu împrăștiere izotropă, fără surse, în geometrie plană, ecuația integro-diferențială de transport

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \frac{\Phi(x, \mu)}{l} = \frac{c}{2l} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu')\, d\mu', \tag{9.3}$$

unde $\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{\lambda} = \Sigma$,

se transformă prin aproximarea ordonatelor discrete în sistemul de ecuații diferențiale

$$\mu_i \frac{d\Phi(x, \mu_i)}{dx} + \frac{\Phi(x, \mu_i)}{l} = \frac{c}{2l} \sum_{j=1}^{N} a_j \Phi(x, \mu_j) \qquad (i = 1\,2, \ldots, N) \tag{9.4}$$

Fizic, această aproximație se reduce la a considera neutronii grupați într-un număr finit de fascicule (în privința dependenței lor unghiulare); fiecare fascicul este caracterizat de o intensitate Φ_i în direcția μ_i. Ecuația de transport pentru distribuția neutronilor în elementul de volum

se reduce deci la un sistem de ecuaţii pentru fasciculele discrete de neutroni, pentru care reprezintă de altfel chiar ecuaţiile de bilanţ neutronic.

Direcţiile μ_i pot fi imaginate ca puncte pe sfera de rază-unitate, iar ponderile a_i afectate fiecărui fascicul neutronic ar reprezenta ariile din jurul acestor puncte corespunzătoare secţiunilor fasciculelor prin suprafaţa sferei.

Rezolvarea ulterioară a sistemului de ecuaţii şi punerea condiţiilor la margine se efectuează ca în metodele clasice.

Şi în această aproximaţie, ca şi în cazul armonicilor sferice duble (Yvon), există posibilitatea de a elimina dificultăţile de la interfeţe prin utilizarea în aproximarea termenului integral al ecuaţiei (9.3) a formulei de integrare Gauss duble. În cazul unor anizotropii pronunţate ale mărimilor neutronice, se poate alege o formulă de sumare de tip Gauss optimă. Un dezavantaj important al acestei metode îl constituie dificultăţile legate de extinderea ei la alte geometrii decît cele plane.

9.2. Aproximaţiile S_N (segmentare unghiulară)

Un mod diferit de cel al aproximaţiei armonicilor sferice de a elimina variabila unghiulară din ecuaţia de transport al neutronilor este cel al metodei S_N, sau Carlson, în care unghiul solid şi variabila spaţială sînt împărţite în n segmente egale, iar distribuţia neutronilor este aproximată în fiecare segment printr-o expresie liniară, definită de valorile ei la capetele fiecărui segment.

Ecuaţia de transport este apoi integrată pe fiecare segment, fiind necesară în acest scop folosirea unei maşini electronice de calcul, atît datorită marelui număr de segmente necesare unei soluţii cît mai exacte, cît şi slabei convergenţe a metodei.

O primă îmbunătăţire şi simplificare în acelaşi timp a acestei metode a fost dată tot de Carlson [C—1], sub forma metodei S_N-discret, pe care o vom considera tot clasică.

În cele ce urmează vor fi amintite numai perfecţionările recente ale acestei metode, cunoscute sub numele de S_N-difuzie, S_N-analitic şi $S_{N/2}$.

9.2.1. Aproximaţia S_N-difuzie

Iniţial, aproximaţia S_N a ecuaţiei de transport a fost folosită numai în cazul mediilor cu împrăştiere izotropă, valabilă în special în aproximaţia monoenergetică şi pentru substanţe moderatoare cu număr atomic nu prea mic.

Scanned with OKEN Scanner

Una dintre metodele folosite pentru extinderea acestei aproximații la cazul împrăștierii anizotrope a fost cea bazată pe înlocuirea secțiunii de împrăștiere σ_s prin $\sigma_s(1-\bar{\mu}_0)$, cunoscută sub numele de „aproximația de transport" a lui S_n.

În cazul aproximației monogrup, $\bar{\mu}_0$ reprezintă sinusul mediu al unghiului de împrăștiere în sistemul laborator, în timp ce în aproximația multienergetică (multigrup) $\bar{\mu}_0$ reprezintă sinusul mediu pentru neutronii care nu-și schimbă grupul de energie în cursul ciocnirilor.

Deși aproximația de transport are o fundamentare mai riguroasă, s-au obținut rezultate mai apropiate de datele experimentale prin aproximația mai puțin riguroasă S_N-difuzie (S_N-P_1) [Z—1], elaborată de curînd (1964), și în care cea de-a $(N+1)$ ecuație a sistemului este furnizată de expresia curentului de neutroni în aproximația de difuzie.

În cazul împrăștierii izotrope monodimensionale, sistemul de ecuații S_N se obține prin divizarea intervalului $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ în N intervale de lungime egală, în care se presupune că densitatea unghiulară a neutronilor variază liniar cu μ:

$$a_j \frac{\partial \psi^{j-1}}{\partial x} + b_j \frac{\partial \psi^j}{\partial x} + \sigma(\psi^j + \psi^{j-1}) = c\sigma\rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (9.5)$$

unde

$$a_j = \frac{1}{3}(\mu_j + 2\mu_{j-1}),$$

$$b_j = \frac{1}{3}(\mu_j + \mu_{j-1}),$$

$$\psi^j = \psi(x, \mu_j),$$

ρ este densitatea neutronilor,

c — numărul de neutroni secundari pe ciocnire,

μ_j — capetele intervalelor în care a fost împărțit μ (cu $\mu_0 = -1$ și $\mu_N = +1$).

Întrucît sistemul (9.5) reprezintă N ecuații, în timp ce necunoscutele ψ^j sînt în număr de $(N+1)$, se mai adaugă o ecuație pentru $\mu = -1$:

$$-\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \sigma\psi^0 = \frac{1}{2} c\sigma\rho. \qquad (9.6)$$

Extinderea acestui formalism la cazul împrăștierii anizotrope liniare se face prin folosirea în ecuația (9.6) a expresiei adecvate pentru secțiunea de împrăștiere:

$$\sigma_s(\mu_0) = \frac{1}{2} c\sigma(1 - 3\bar{\mu}_0\bar{\mu}), \qquad (9.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

care conduce la noul sistem de ecuații tot în aproximația de transport:

$$a_j \frac{\partial \psi^{j-1}}{\partial x} + b_j \frac{\partial \psi^j}{\partial x} + \sigma (\psi^{j-1} + \psi^j) = c\sigma (\rho + 3 \gamma_j \bar{\mu}_0 J) \qquad (9.8)$$

$$-\frac{\partial \psi^0}{\partial x} + \sigma \psi^0 = \frac{c\sigma}{2} [\rho - 3 \bar{\mu}_0 J], \qquad (9.9)$$

unde

$$\gamma_j \equiv \frac{1}{2} (\mu_j + \mu_{j-1}),$$

J și ρ reprezintă curentul și densitatea de neutroni, exprimate în cazul integrării trapezoidale prin relațiile

$$J = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^{N} (a_K \psi^{K-1} + b_K \psi^K), \qquad (9.10)$$

$$\rho (x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (\psi^{j-1} + \psi^j). \qquad (9.11)$$

Noua aproximație, S_N -difuzie, înlocuiește curentul de neutroni J dat de (9.10) prin expresia cunoscută din aproximația de difuzie:

$$J = -D \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{3 \sigma (1 - c \mu_0)} \frac{dl}{dx}.$$

Autorii au aplicat această nouă și simplă aproximație la calculul distanței de extrapolare în problema Milne și a lungimilor de difuzie inverse, obținînd rezultate mai bune decît prin aproximația de transport S_N (vezi tabelele 9.1 și 9.2), în special pentru anumite valori ale lui c. Pentru valorile limită $c = 0$ și $c = 1$, atît aproximația S_N -difuzie, cît și S_N -*tr.* dau rezultate exacte.

TABELA 9.1

Distanța de extrapolare în problema Milne

c	$\bar{\mu}_0$	S_2	S_2 - difuzie	S_2 - aprox. tr.	S_∞	Aprox. de difuzie
1	—	$\frac{2}{3}(1-\bar{\mu}_0)^{-1}$	$\frac{2}{3}(1-\bar{\mu}_0)^{-1}$	$\frac{2}{3}(1-\bar{\mu}_0)^{-1}$	$0{,}7104\,(1-\bar{\mu}_0)^{-1}$	$\frac{2}{3}(1-\bar{\mu}_0)^{-1}$
0,7	0,3	0,9233	0,9169	0,8856	—	0,8439

TABELA 9.2

Lungimile de difuzie inverse

c	$\bar{\mu}_0$	„Exact" S_2	S_2 - dif.	S_2 - tr.	„Exact" S_∞	S_∞ - dif.	S_∞ - tr.	Aprox. de difuzie
1	oricare	0	0	0	0	0	0	0
0,9	0	0,5344	0,5344	0,5344	0,5254	0,5254	0,5254	0,5477
	0,1	0,5098	0,5110	0,5027	0,5014	0,5031	0,4989	0,5225
	0,3	0,4564	0,4597	0,4330	0,4492	0,4542	0,4416	0,4680
0,7	0	0,6990	0,6990	0,6990	0,8286	0,8286	0,8286	0,9487
	0,1	0,6906	0,6809	0,6695	0,8005	0,8077	0,7902	0,9148
	0,3	0,6758	0,6451	0,6101	0,7443	0,7598	0,7062	0,8432
0,5	0	0,8851	0,8851	0,8851	0,9575	0,9575	0,9575	1,2247
	0,1	0,8730	0,8618	0,8650	0,9401	0,9472	0,9185	1,1937
	0,3	0,8488	0,8147	0,8232	0,9019	0,9277	0,8357	1,1291
0	oricare	1,3330	1,3330	1,3330	1,0000	1,0000	1,0000	1,7320

În concluzie, noua aproximație S_N-difuzie se dovedește mai utilă prin rezultatele corecte pe care le furnizează în prezența împrăștierii anizotrope decît aproximațiile clasice.

9.2.2. Aproximația S_N- analitică

Deși inițial această remarcabilă aproximație a fost formulată doar pentru rezolvarea numerică a ecuației de transport, ea a fost dezvoltată în ultimul timp [D—1] [F—1] [M—1] și ca o metodă analitică, ceea ce îi conferă o mai mare generalitate și o mai riguroasă fundamentare.

Prin formularea analitică a acestei metode numerice s-au elucidat probleme importante legate de alegerea optimă a condițiilor de continuitate la interfețe și a celor la margine, de invarianță la reflexie și de evaluare a preciziei metodei. Deși fondatorul acestei metode (Carlson) în forma ei clasică afirmă [C—1] că aceasta constituie o extensiune numerică a metodei analitice a lui Serber—Wilson, totuși formularea analitică prezentată aici conduce la o altă variantă.

Spre deosebire de metoda S_N clasică (numerică), în care fiecare aproximare liniară ψ_N a distribuției unghiulare a neutronilor trebuia să fie continuă separat și deci neutronii trebuiau considerați ca fiind concentrați în anumite puncte discrete ale fiecărui interval, ceea ce îi conferea un accentuat caracter de discontinuitate (căci în fond reprezintă o variantă a metodei ordonatelor discrete), în varianta analitică a acestei metode se consideră că neutronii sînt distribuiți uniform pe întreg intervalul.

Condițiile la margine și la interfețele dintre diverse medii se consideră ca limite ale unor variații rapide, dar continue ale discontinuităților mediilor.

Scanned with OKEN Scanner

Această formulare a condițiilor la margine asigură automat continuitatea curentului total de neutroni la interfețe, dar nu și a fluxului scalar.

9.2.3. Aproximația $S_{N/2}$

Caracteristica principală a metodei S_N clasice este, după cum s-a arătat mai sus, împărțirea variabilei unghiulare în n segmente egale, în care distribuția neutronilor este aproximată prin expresii liniare. Totuși, nu toate segmentele au pondere egală și se demonstrează matematic că se obțin aproximări mult mai bune ale distribuțiilor de neutroni dacă segmentele sînt date de o formulă de integrare gaussiană. Folosirea unei formule de integrare gaussiană dublă [S—1] conduce la o formulare $S_{N/2}$ analogă celei a lui Yvon, a armonicilor sferice duble, și la avantaje analoge în tratarea problemelor cu discontinuități.

O extindere a acestei metode, „dublu S_N", a fost efectuată și de Bengston [B—1].

9.3. Metoda sintetică

O aproximație numerică ce se bazează pe un principiu foarte general de sintetizare a soluției ecuației de transport pentru neutroni are, grație acestei particularități, o serie de avantaje remarcabile printre care posibilitatea abordării problemei transportului neutronilor în reactor pentru geometrii oricît de complexe sau luarea în considerare a dependenței sau independenței temporale, a izotropiei sau anizotropiei împrăștierii neutronilor și a omogenității sau eterogenității reactorului [K—1].

Acest principiu general de sintetizare constă în găsirea condițiilor în care soluția unei ecuații oarecare (deci și cea de transport al neutronilor), imposibil sau dificil de rezolvat prin metodele clasice, poate fi înlocuită prin sinteza (combinația) soluțiilor unor ecuații mai simple la care poate fi redusă ecuația originală.

Înainte de a expune modul de aplicare al metodei de aproximare sintetică la ecuația de transport, este utilă o expunere a principiului metodei prin aplicarea ei la un exemplu simplu.

Datorită faptului că această metodă operează curent cu noțiuni din calculul matriceal, se va folosi în cele ce urmează formularea matriceală.

Fie deci ecuația matriceală

$$x = Ax + s_1, \tag{9.12}$$

dificilă de rezolvat fie datorită formei matricei A, fie termenului liber

„sursă" s_1. Presupunem că există o transformare care conduce ecuația (9.12) la o ecuație matriceală de forma

$$y_n = B\,(y_n + s_n), \tag{9.13}$$

a cărei soluție se obține simplu:

$$y_n = [I - B]^{-1} \cdot B \cdot s_n, \tag{9.14}$$

unde B este o matrice care aproximează pe A.

O astfel de transformare există și este dată de

$$x = s_1 + x_1, \tag{9.15}$$

care, introdusă în (9.12), conduce la

$$s_1 + x_1 = A(x_1 + s_1) + s_1 \tag{9.16}$$

sau la

$$x_1 = A(x_1 + s_1), \tag{9.17}$$

care este analogă lui (9.13) și are deci soluția de forma

$$x_1 = [I - A]^{-1} A \cdot s_1. \tag{9.18}$$

Termenul x_1 reprezintă primul reziduu, iar s_1 este prima sursă-reziduu.

În etapa următoare considerăm că există o transformare mai bună obținută ca sursă a soluției problemei simple (9.13) și a unui termen reziduu x_2:

$$x = (y_1 + s_1) + x_2. \tag{9.19}$$

Termenul-reziduu x_2 are proprietatea că satisface o ecuație de tipul (9.12) (adică a cărei soluție se caută), deoarece

$$y_1 + s_1 + x_2 = A\,(y_1 + s_1 + x_2) + s_1 \tag{9.20}$$

sau

$$x_2 = Ax_2 + s_2\,; \qquad s_2 = [A - I]\,[y_1 + s_1] + s_1\,; \tag{9.21}$$
$$= [A - B]\,[y_1 + s_1],$$

iar în cazul în care matricea B aproximează riguros pe A, reziduul x_2 se anulează. Continuînd procesul iterativ, se consideră o nouă transformare, mai bună:

$$x = (y_1 + s_1) + (y_2 + s_2) + x_3, \tag{9.22}$$

unde y_1 și s_1 sînt cunoscuți din prima iterație, y_2 este soluția ecuației mai simple (9.13) pentru $n = 2$, iar x_3 satisface, ca orice reziduu x_n, o ecuație analogă celei pe care trebuie s-o rezolvăm (9.12), cu o condiție în plus că trebuie să se anuleze cînd matricea B cunoscută o aproximează riguros pe A, adică soluția găsită este identică (sau foarte apropiată) de soluția ecuației (9.12) și cînd $n \to \infty$. Deci

$$x_3 = Ax_3 + s_3\,; \qquad s_3 = (A - B)\,(y_2 - s_2). \tag{9.23}$$

Extrapolînd la cazul unui număr infinit de iterații, se poate deci afirma că soluția unică a ecuației (9.12) este

$$x = \sum_{n=1}^{J-1} [y_n + s_n] + x_y, \tag{9.24}$$

unde

$$y_n = B(y_n + s_n) = [I - B]^{-1} \cdot B \cdot s_n, \qquad n \geqslant 1, \tag{9.25}$$

$$s_n = [A - B]\,[y_{n-1} + s_{n-1}], \qquad n > 1, \tag{9.26}$$

$$x_J = Ax_J + s_J, \qquad J \geqslant 2, \tag{9.27}$$

cu condiția ca $[I - A]$ și $[I - B]$ să fie nesingulare.

În lucrarea citată este dat și un exemplar numeric, pe care îl găsim util de redat:

$$x = Ax + s_1 \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}51 & -0{,}51 \\ -0{,}51 & 1{,}52 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se alege o matrice B care aproximează bine pe A, deci

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}50 & -0{,}50 \\ -0{,}50 & 1{,}50 \end{bmatrix} \rightarrow [I - B]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{nesingulară}.$$

Introducînd aceste valori în (9.25) și în (9.26), obținem y_n și s_n, pe care îi folosim la deducerea lui x din (9.24):

$$x = \begin{bmatrix} 2 & +1 & -0{,}05 & +0{,}04 & +0{,}0019 & -0{,}0010 \cdots \\ -3 & +2 & +0{,}14 & -0{,}05 & -0{,}0048 & +0{,}0019 \cdots \end{bmatrix} + x_6,$$

unde

$$x_6 = \begin{bmatrix} 0{,}0000000489 \\ 0{,}0000002230 \end{bmatrix}.$$

Vom utiliza în cele ce urmează teoria acestei metode sintetice la rezolvarea ecuației de transport integrale fără dependență temporală și cu împrăștiere izotropă

$$\psi_0 = NT\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U\psi_0 + NT\,(4\pi s/\Sigma) + NT_B\psi_B, \tag{9.28}$$

unde

ψ_0 este fluxul scalar de neutroni în punctul (ρ, u),

ρ — poziția „optică" a punctului $r(x, y, z)$ definită prin

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\Omega}_1 \int_0^{|r|} \mathrm{d}R'\, \Sigma\,(R'\,\boldsymbol{\Omega}_1\, u); \qquad \mathbf{r} = R_1\boldsymbol{\Omega}_1,$$

$s(r, u, \Omega)$ — numărul probabil de neutroni emiși pe unitatea de volum, de letargie și de unghi solid,

$T_B \psi_B$ — fluxul de neutroni în ρ datorit unui fascicul de neutroni incident la suprafața elementului de volum,

N, T, U — operatorii: unghiular, de transport și de împrăștieri izotrope.

Pentru soluționarea acestei ecuații de transport presupunem că există o problemă mai simplă, definită prin

$$\Phi_n = G\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U[\Phi_n + s_n], \tag{9.29}$$

unde G este un operator scalar de aproximare a ecuației de transport.

Putem deci considera că această ecuație mai simplă de rezolvat este chiar ecuația aproximației P_1.

Considerînd că ultimii doi termeni ai ecuației (9.28) reprezintă o sursă, putem reformula ecuația (9.28) într-un mod analog cu ecuația (9.12):

$$\psi_0 = NT\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U\psi_0 + s_1, \tag{9.30}$$

$$s_1 = NT\left(\frac{4\pi s}{\Sigma}\right) + NT_B\psi_B. \tag{9.31}$$

Prima iterație pentru această ecuație se consideră, analog ecuației (9.15) și, respectiv, (9.17),

$$\psi_0 = \psi_0^1 + s_1 \tag{9.32}$$

și

$$\Phi_1 = G\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U[\Phi_1 + s_1], \tag{9.33}$$

care conduce la valoarea primului reziduu ψ_0^1 (vezi ec. 9.17)

$$\psi_0^1 = NT\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U\,[\psi_0^1 + s_1] \tag{9.34}$$

sau

$$\psi_0^1 = \psi_0^2 + \Phi_1. \tag{9.35}$$

Cea de-a doua iterație ne permite să scriem (analog ecuației (9.21)

$$\psi_0^2 = NT\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U[\psi_0^2 + s_2], \tag{9.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

din care rezultă și

$$s_2 = [NT - G]\left[\frac{1}{\Sigma}\right] U(\Phi_1 + s_1) \text{ ș. a. m. d.} \tag{9.37}$$

Soluția finală a ecuației de transport (9.28) va fi deci, conform ecuației (9.24),

$$\psi_0(\rho, u) = \sum_{n=1}^{J-1} [\Phi_n + s_n] + \psi_0^J, \tag{9.38}$$

unde

Φ_n este dat de (9.29),

$$s_n = [NT - G]\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U[\Phi_{n-1} + s_{n-1}], \qquad n > 1, \tag{9.39}$$

$$\psi_0^J = NT\left(\frac{1}{\Sigma}\right) U\psi_0^J + s_J \quad , \quad J > 1.$$

Se obțin rezultatele foarte bune chiar pentru valori mici ale lui J, deși rezultatele riguroase sînt obținute la $J \to \infty$.

Formularea (9.28) a ecuației de transport prin intermediul operatorilor este foarte generală și foarte comodă, deoarece, printr-o corectă exprimare a operatorilor, putem trata aspectul integro-diferențial, integral sau de difuzie al ecuației de transport.

Astfel, în aproximația P_1

$$G = [1 - \nabla(\Sigma D)\nabla], \tag{9.40}$$

în timp ce în aproximația integro-diferențială

$$\Sigma G \Phi_n = U[\Phi_n + s_n] \tag{9.41}$$

și în cea de difuzie

$$G = \left[1 - \Sigma D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]. \tag{9.42}$$

Această metodă sintetică, folosită în cadrul aproximației de difuzie a ecuației de transport (9.28), a permis obținerea unor rezultate comparabile cu cele obținute în aproximația P_5, deci foarte bune, în timp ce în aproximațiile de transport aceste rezultate sînt chiar mai apropiate de cele riguroase. Luînd deci în considerare expresia fluxului scalar într-o placă nereflectată, omogenă, de grosime $2d$ și conținînd o sursă de volum $c\Sigma s_1/4\pi$ (c = numărul de neutroni pe ciocnire),

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2}\int_{-d}^{+d} \mathrm{d}\Phi\, E_1(|z - r|)\, c[\psi_0(r) + s_1(r)], \quad -d \leqslant z \leqslant +d, \tag{9.43}$$

soluția lui (9.43) este dată de (9.24)

$$\psi_0(z) = \Phi_1(z) + \sum_{n=2}^{J-1} [\Phi_n(z) + s_n(z)] + \psi_0^J(z), \tag{9.44}$$

unde

$$G\Phi_n = c\,[\Phi_n + s_n],$$

$$G = 1 - \Sigma D \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},$$

$$s_n = NTG\,\Phi_{n-1} - \Phi_{n-1}$$

sau

$$\psi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c\,D_{i,n}}{1 + \Sigma DB_i^2 - c}(1 + \Sigma DB_i^2)\,NTZ_i. \tag{9.45}$$

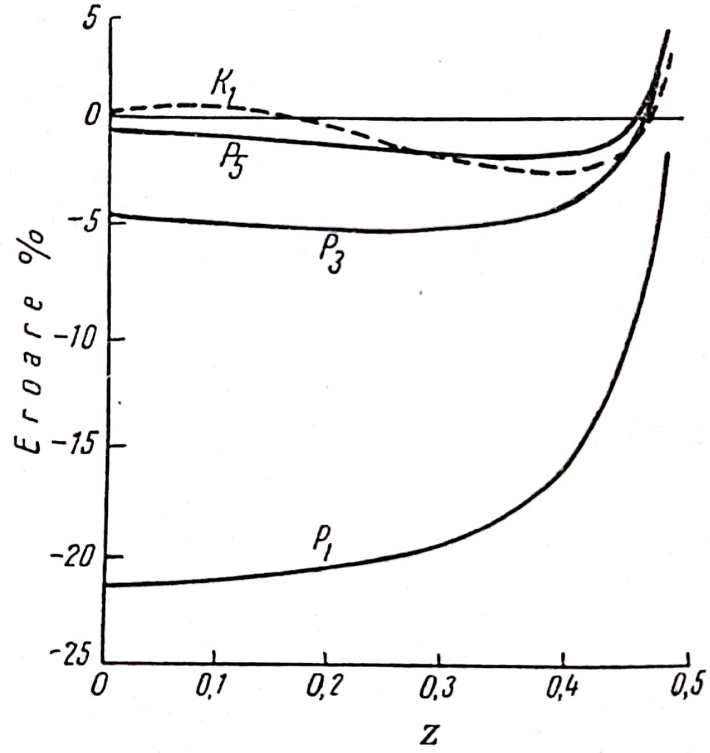


Fig. 9.1

Efectuînd calculele numerice pentru cazul

$$s_1 = \frac{1}{c}; \quad D = \frac{1}{c}\,\frac{2\sin(B_i d)}{d + L\sin^2(B_i d)}; \quad c = 0{,}9; \quad d = 0{,}5; \quad L = 0{,}404;$$

$\Sigma D = (1/2{,}35)^2$, s-au obținut rezultatele din figura 9.1, notate cu K_1 și comparate cu rezultatele aceleiași probleme obținute în aproximațiile P_1, P_3, P_5.

soluția lui (9.43) este dată de (9.24)

$$\psi_0(z) = \Phi_1(z) + \sum_{n=2}^{J-1} [\Phi_n(z) + s_n(z)] + \psi_0^J(z), \tag{9.44}$$

unde

$$G\Phi_n = c\,[\Phi_n + s_n],$$

$$G = 1 - \Sigma D \frac{d^2}{dx^2},$$

$$s_n = NTG\,\Phi_{n-1} - \Phi_{n-1}$$

sau

$$\psi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c\,D_{i,n}}{1 + \Sigma DB_i^2 - c}(1 + \Sigma DB_i^2)\,NTZ_i. \tag{9.45}$$

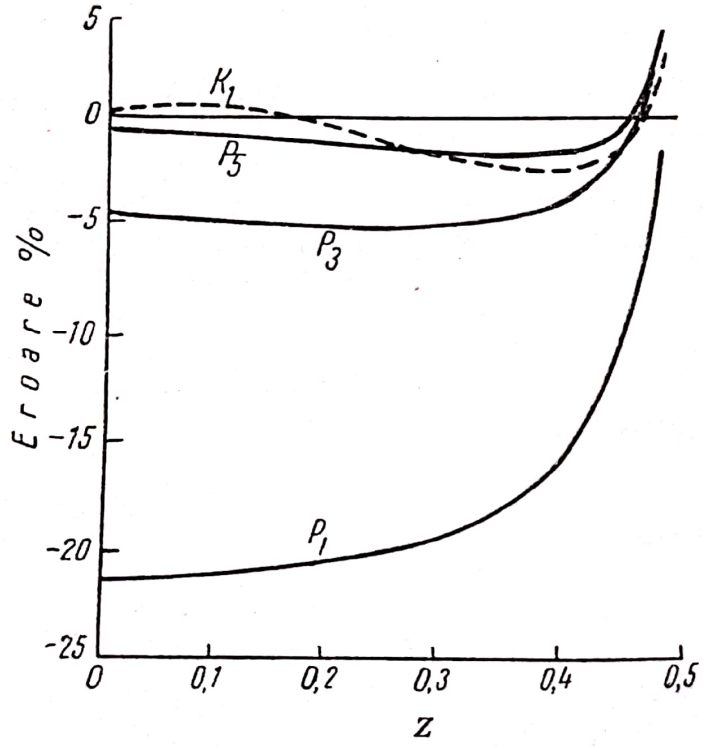


Fig. 9.1

Efectuînd calculele numerice pentru cazul

$$s_1 = \frac{1}{c}; \quad D = \frac{1}{c}\,\frac{2\sin(B_i d)}{d + L\sin^2(B_i d)}; \quad c = 0{,}9; \quad d = 0{,}5; \quad L = 0{,}404;$$

$\Sigma D = (1/2{,}35)^2$, s-au obținut rezultatele din figura 9.1, notate cu K_1 și comparate cu rezultatele aceleiași probleme obținute în aproximațiile P_1, P_3, P_5.

9.4. Metoda Monte-Carlo (modelarea stohastică)

Este o remarcabilă metodă de calcul numeric, care și-a găsit aplicații în numeroase domenii ale științei și tehnicii, și în special în problemele a căror dificultate analitică sau geometrică depășește posibilitățile metodelor obișnuite de calcul sau care, deși simple principial, necesită un volum enorm de calcule.

A fost folosită cu mult succes în cercetări operaționale în matematică, în rezolvarea ecuației lui Schrödinger, în mecanica stohastică, în fizica particulelor elementare și în teoria cascadelor de radiații cosmice, în studiul „zgomotului" de fond în sistemele fizice, în hidrodinamică și hidrologie, în teoria transportului neutronilor, în biologie, în compunerea muzicii, în probleme de tactică și de strategie sau în cele economice, în construcții etc.

În esență, metoda Monte-Carlo constă în modelarea stohastică artificială, cu ajutorul mașinilor electronice de calcul, a proceselor fizice sau matematice în studiu.

În fizica neutronilor, această metodă, numită inițial metoda modelării, a cunoscut aplicații sporadice încă din 1933 prin lucrările lui Fermi privitoare la încetinirea neutronilor. Dar denumirea Monte-Carlo a fost dată acestei metode abia în 1946, cînd lucrările lui Ulam și von Neumann dedicate simulării reacției de fisiune în lanț au inițiat un vast program de abordare a problemelor insolubile sau dificile din fizica reactorilor.

Noua denumire provine de la faptul că rezolvarea problemei prin modelarea stohastică a proceselor considerate se efectuează prin folosirea unor numere aleatoare, cum sînt cele obținute în jocurile probabiliste (ruletă etc.). Întrucît modelarea stohastică constă din repetarea unor operații simple, se alege astfel modelul asemuit cu un „joc" probabilistic, încît operația de repetare a lui să conducă la valoarea medie a mărimilor fizice sau matematice dorite.

În teoria transportului, metoda Monte-Carlo constă în urmărirea separată a unui număr de neutroni de-a lungul traiectoriilor lor și medierea rezultatelor pentru a obține anumite mărimi fizice proprii reactorului nuclear și populației lui neutronice considerate ca un tot.

Ea se deosebește deci de metoda clasică a transportului neutronilor, în care întreaga populație neutronică dintr-un element de volum este studiată simultan prin mărimi medii (densitate, flux, curent de neutroni etc.).

Din această cauză, cantitatea de informație pentru neutronii din elementul de volum tratați prin metoda clasică a ecuației Boltzmann este mult mai mare decît cea necesară urmăririi unui singur neutron prin metoda Monte-Carlo. În schimb, un dezavantaj al acestei metode îl constituie necesitatea de a urmări un număr foarte mare de neutroni pentru ca prin medierea rezultatelor individuale să se obțină valori cît mai exacte ale mărimilor neutronice.

Scanned with OKEN Scanner

Cele mai multe aplicații ale acestei metode în fizica reactorilor au fost legate de calculul protecției contra radiațiilor, al parametrilor de difuzie în rețea, al absorbției la rezonanță, al „vîrstei" neutronilor în procesul de termalizare, în calcule de criticitate și de consum al combustibilului, în calculul spectrelor neutronice și în general în probleme legate de ecuația de transport pentru neutroni.

O bibliografie cuprinzînd aproape 400 de lucrări cu aceste aplicații este dată în [R—1].

Posibilitatea aplicării metodei Monte-Carlo în fizica reactorilor se bazează pe faptul că toate procesele pe care le suferă sau le provoacă neutronii în reactor pot fi reprezentate prin numere aleatoare. Astfel, înseși secțiunile de interacțiune ale neutronilor (absorbție, împrăștiere, fisiune etc.) sînt niște probabilități, iar punctele prin care neutronii intră sau ies dintr-un sistem sau apar în interiorul lui (sursele), energiile acestor neutroni, direcțiile lor și tipul de interacțiune pot fi reprezentate de numere aleatoare, care trebuie să îndeplinească însă condiția de a se găsi în limitele cunoscute de variație pentru procesul respectiv. Șirul de procese prin care trece un neutron și care sînt urmărite prin modelarea stohastică reprezintă „istoria" unui neutron.

Din cele schițate mai sus rezultă că principalele etape necesare în rezolvarea numerică a unei probleme de transport prin metoda Monte-Carlo sînt:

— alegerea modelului stohastic cel mai adecvat pentru suita de procese prin care vor trece neutronii;

— alegerea numerelor aleatoare;

— evaluarea numărului aproximativ de „istorii" de neutroni ce trebuie „urmăriți" în cadrul metodei pentru a obține rezultatele cu o precizie dată.

În privința modelului stohastic de folosit, alegerea este ușurată de cunoașterea numeroaselor probabilități ale proceselor neutronice (secțiuni, distribuții de fisiune, de încetinire etc.).

Alegerea numerelor aleatoare este ușurată de existența a numeroase tabele și a unor metode matematice sau fizice de generare chiar la mașinile electronice în procesul de calcul.

În privința preciziei rezultatelor, o formulă aproximativă foarte simplă

$$N = \frac{1 - P}{\varepsilon^2 P}$$

furnizează eroarea relativă ε a rezultatului în funcție de numărul de „istorii" de neutroni N și de distribuția binomială P de probabilitate a proceselor modelate.

De exemplu, în calculele de protecție $P \approx 10^{-14}$ și deci pentru $\varepsilon \approx 1\%$, sînt necesare $N \approx 10^{18}$ istorii de neutroni, ceea ce reprezintă o problemă dificilă chiar pentru mașinile de calcul cu performanțe înalte.

Scanned with OKEN Scanner

În problemele în care „istoriile" sînt mai scurte, ca, de exemplu, în problemele de absorbție la rezonanță a neutronilor, valoarea lui $P \approx 0{,}9$ și deci pentru $\varepsilon \approx 1\%$ sînt necesare doar $10^3 - 10^5$ istorii.

Există numeroase metode de îmbunătățire a modelelor stohastice, de alegere optimă a lor, de mărire a convergenței calculelor prin folosirea transformărilor exponențiale, a modelării ponderate, secvențiale, stratificate, corelate, inverse sau sistematice, a căror expunere depășește cadrul acestui capitol și pentru care cititorul este îndreptat spre lucrările de specialitate [H—1], [G—1].

Reducerea numărului de „istorii" se efectuează recent prin folosirea așa-numiților estimatori și prin eliminarea modelării etapelor istoriei unui neutron care pot fi deduse analitic prin folosirea valorilor medii ale variabilei aleatoare în locul valorilor modelate.

Vom exemplifica modul de aplicare al metodei Monte-Carlo la calculul încălzirii plăcii de protecție a reactorului în urma interacțiunei radiației γ din reactor cu nucleele mediului protector [O—1]. Acest calcul este mai simplu, deoarece printre procesele la care pot participa radiațiile γ nu se găsesc și fisiunile nucleare și deci procesele de reacții multiplicatoare în lanț.

Se consideră că fluxul P de radiații γ incident pe suprafața protecției, constituită din oțel de 20 cm grosime, este $P = 3 \cdot 10^{10}$ fotoni/cm^2 ·s, fiind distribuit în funcție de unghiul de direcție după o lege de tip Lambert (cosinusoidală) $P(\xi) = 2 \sin \xi \cos \xi$.

Cunoscînd că energia fotonilor primari este reprezentată de o distribuție conform căreia probabilitatea ca un foton să aibă o energie dată este cea din tabela 9.3, se aplică metoda Monte-Carlo pentru a determina

a) energia fotonilor incidenți E;
b) cosinusul unghiului ξ' de pătrundere în protecție;
c) poziția primei ciocniri x_1;
d) tipul primei ciocniri (împrăștiere sau absorbție);
e) energia depozitată în x_1 (în MeV);
f) cosinusul unghiului de deviere θ în protecție în cazul împrăștierii;
g) poziția celei de-a doua ciocniri x_2;
h) tipul celei de-a doua ciocniri;
i) etc.

Modelarea stohastică a istoriei unui foton este considerată încheiată în momentul în care acesta este absorbit sau scapă în exteriorul protecției.

Dintr-o tabelă de numere aleatoare ne alegem primele zece numere N, care vor fi suficiente pentru acest exemplu simplu.

TABELĂ DE NUMERE ALEATOARE N

1	0,87	5	0,82	9	0,17
2	0,36	6	0,87	10	0,84
3	0,03	7	0,99	11	0,18
4	0,46	8	0,60	12	0,44

Mai sînt necesare de asemenea valorile distribuției spectrale a radiației γ incidente, adică probabilitatea P a fotonilor de anumită energie E'_γ de a ajunge la altă energie E_γ după ciocniri în placa de oțel (tabela 9.3) și datele nucleare privind interacțiunile radiației γ în oțel (tabela 9.4).

TABELA 9.3

E'_γ (MeV)	$P(E_\gamma \leqslant E'_\gamma)$
0,25	0,00
0,50	0,10
1,00	0,31
2,00	0,67
2,50	0,79
3,00	0,87
4,00	0,95
5,00	1,00

TABELA 9.4.
Factori de atenuare pentru oțel

E (MeV)	μ_c (cm^{-1})	μ_t (cm)	μ_c/μ_t
0,102	1,04	2,55	0,41
0,204	0,86	1,15	0,82
0,306	0,75	0,903	0,93
0,408	0,669	0,694	0,96
0,510	0,610	0,625	0,98
0,765	0,510	0,516	0,99
1,02	0,445	0,448	0,99
2,04	0,308	0,320	0,96
3,06	0,242	0,272	0,89
4,08	0,202	0,248	0,81
5,11	0,174	0,237	0,74

a) Pentru a răspunde la prima întrebare, observăm că mărimea aleatoare necesară aplicării metodei Monte-Carlo este în acest caz chiar probabilitatea P ca un foton să aibă o anumită energie (tabela 9.3). Folosind pentru această probabilitate valoarea dată de primul număr aleator $N_1 = 0{,}87$, observăm din tabelă că acestei valori a probabilității îi corespunde o energie $E = 3$ MeV. Deci în etapele următoare ale acestui calcul vom considera că primul foton pe care l-am ales pentru a-i urmări „istoria" prin metoda Monte-Carlo este incident pe placa de oțel de protecție cu o energie de 3 MeV.

Dacă am fi ales numărul aleator $N_2 = 0{,}36$, de exemplu, energia fotonului incident ar fi fost $E \approx 1{,}1$ MeV etc.;

b) Unghiul de pătrundere în protecție al fotonului γ va fi furnizat de cel de-al doilea număr aleator, $N_2 = 0{,}36$. În acest scop folosim informația privind distribuția fotonilor incidenți la placa de protecție, dată de

$$P(\xi \leqslant \xi') = 2\int_0^{\xi'} \cos\xi \sin\xi \, d\xi,$$

$$= \sin^2 \xi' = N_2,$$

$$= 0{,}36,$$

$$\sin\xi' = 0{,}60,$$

$$\xi' = 36°9.$$

c) Poziția primei ciocniri x_1, în funcție de poziția de pătrundere a fotonului în protecție, va fi dată prin distanța dintre aceste două puncte l_1, adică prin lungimea parcursului fotonului.

Pentru determinarea lui se face uz de probabilitatea unei particule de a parcurge o anumită distanță l_1 într-un mediu dat fără a suferi ciocniri și este dată de o exponențială de forma

$$P = e^{-\mu_t l_1},$$

unde μ_t este un factor de atenuare care depinde de energia fotonilor și de proprietățile mediului (oțel). Din tabela 9.4 se obține valoarea $\mu_t = 0{,}274\ \text{cm}^{-1}$. Considerînd că această probabilitate P este dată de următorul număr aleator $N_3 = 0{,}03$, se calculează

$$N_3 = e^{-\mu_t l_1},$$

$$l_1 = -\frac{\log N_3}{\mu_t},$$

$$l_1 = -\frac{\log 0{,}03}{0{,}274} = 12{,}82\ \text{cm}.$$

Ținînd seama și de unghiul de incidență al fotonului în placă, se obține

$$x_1 = l_1 \cos\xi' = 10{,}26\ \text{cm}.$$

d) Probabilitatea calculată mai sus era cea de parcurgere a unui traseu prin mediu pînă la prima ciocnire. Prin urmare, în acest moment fotonul a suferit o ciocnire și trebuie determinat tipul ei. Apariția unui tip sau altul de ciocnire (cu împrăștiere, cu absorbție și, în cazul neutronilor, cu fisiune) se face cu o anumită probabilitate, care este funcție de factorii de atenuare ai particulei în mediul respectiv.

Observînd că raportul probabilităților μ_c/μ_t constituie o astfel de probabilitate, vom considera că, dacă ea este mai mică decît următorul număr aleator N_4,

$$\mu_c/\mu_t \leqslant N_4,$$

avem de-a face cu o captură a fotonului (deoarece ponderea mai mare în raport a avut-o numărătorul), iar dacă acest raport este mai mare,

$$\mu_c/\mu_t \geqslant N_4,$$

atunci ciocnirea are caracterul unei împrăștieri.

Întrucît pentru fotonii de 3 MeV în oțel raportul

$$\frac{\mu_c}{\mu_t} = 0{,}90,$$

iar $0{,}90 > N_4 = 0{,}46$, rezultă că ciocnirea este o împrăștiere.

e) În acest caz, în următoarea etapă a calculului ne interesează energia E' care îi mai rămîne fotonului după ciocnire.

După legile clasice ale ciocnirilor, raportul energiilor E' și E, corespunzătoare situației după și înaintea ciocnirii, este dat de

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \frac{E}{0{,}51}(1 - \cos\theta)},$$

unde

$$\cos\theta = \left[1 - \left(\frac{0{,}51}{E'} - \frac{0{,}51}{E}\right)\right] = [1 - (\beta' - \beta)].$$

Întrucît următorul număr aleator este $N_5 = 0{,}82$, se obține $\beta' = 1{,}30$, sau

$$E' = \frac{0{,}51}{\beta'} = 0{,}39.$$

Deci fotonul cedează în regiunea primei ciocniri cu caracter împrăștiant o cantitate de energie egală cu

$$E - E' = 3 - 0{,}39 = 2{,}61 \text{ MeV}.$$

f) Calculul precedent al energiei fotonului după ciocnire furnizează și date suficiente pentru determinarea unghiului de împrăștiere fără a mai fi necesară o modelare și folosirea unui nou număr aleator, deoarece

$$\cos\theta = 1 - (\beta' - \beta) = 1 - (1{,}30 - 0{,}17) = -0{,}13,$$

$$\theta = 97°5'.$$

g) În continuare, fotonul va continua să străbată placa de protecție de oțel cu o energie mult mai mică ($E' = 0{,}39$ MeV) și cu o direcție dată θ pînă va suferi o nouă ciocnire. Pentru a determina distanța x_2 la care are loc cea de-a doua ciocnire, folosim același raționament și calcul ca la evaluarea parcursului pînă la prima ciocnire, dar folosind drept număr aleator pe cel ce urmează în tabelă ($N_6 = 0{,}87$):

$$l_2 = \frac{\log 0{,}87}{\mu_t},$$

unde μ_t (0,39 MeV) $= 0{,}71$ cm^{-1} (conform tabelei 9.4).

După efectuarea calculelor rezultă

$$l_2 = 0{,}196 \text{ cm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

h) Tipul noii ciocniri va fi dat, ca şi în primul caz, de compararea valorii raportului

$$\frac{\mu_c\,(0{,}39\ \text{MeV})}{\mu_t\,(0{,}39\ \text{MeV})} = \frac{0{,}671}{0{,}705} = 0{,}95$$

cu următorul număr aleator $N_7 = 0{,}99$:

$$0{,}95 < N_7 = 0{,}99,$$

deci ciocnirea este urmată de absorbţie, după care „istoria" fotonului nu mai poate fi urmărită. Întrucît energia acestuia înaintea ultimei ciocniri era de 0,39 MeV, înseamnă că întreaga această energie este cedată mediului în punctul respectiv la adîncimea $(x_1 + x_2)$ în placa de protecţie.

Efectuînd calcule Monte-Carlo asemănătoare pentru un număr mare de fotoni, se pot obţine valori medii ale mărimilor calculate mai sus cu atît mai apropiate de valorile exacte, cu cît numărul de fotoni astfel urmăriţi este mai mare.

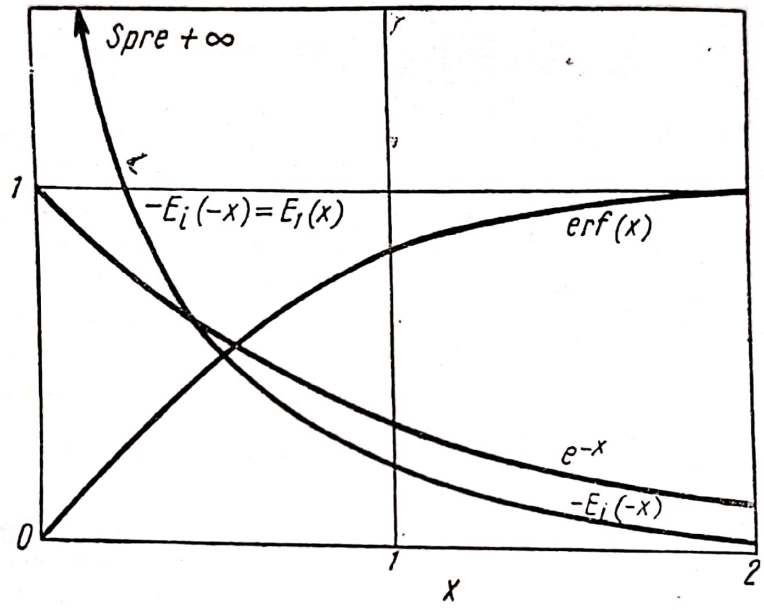
BIBLIOGRAFIE

B—1 Bengston J., UCRL—4691, 1956.
C—1 Carlson B., PICG, **16**, 535 (1958).
C—2 Clark M. Jr. et al., *Numerical methods of reactor analysis*, Londra, Academic Press, 1964.
D—1 Davidov V. I. et al., МИФИ, Teoria i Fizika Reaktorov, 13, Atomizdat, Moscova, 1967.
F—1 Finucane J. S. et al., TANS, **9**, 432 (1966).
G—1 Goertzel G. et al., Prog. Nucl. En. ser. I, **2**, 315 (1958).
G—2 Gast R. C., WAPD—TM—118, 1958.
H—1 Hammersley J. M. et al., *Monte-Carlo methods*, Londra, Methuen. and Co. Ltd., 1965.
K—1 Kopp H. J., TID—15. 405, 1962; NSE, **17**, 65 (1963).
M—1 Mennig J, et al., NSE, **31**, 361 (1968).
O—1 Orsort, TID—5261, 1955.
R—1 Roşescu T., *Monte-Carlo method in reactor calculations*, IFA—FR—53, 1966.
S—1 Sykes J. B., Mon. Nat. Roy. Astron. Soc., **111**, 377 (1951).
W—1 Wachspress E. L. et al., PICG, **16**, 483, P/633 (1958).
W—2 Weinberg A. M. et al., *The physical theory of neutron chain reactors*, Univ. of Chicago Press, 1958.
Z—1 Zweifel P. F., NSE, **20**, 513 (1964).

Scanned with OKEN Scanner

ANEXĂ

În tratarea unor numeroase probleme întîlnite în teoria transportului neutronilor sînt necesare unele funcţii matematice speciale pe care le vom prezenta în cele ce urmează (vezi fig. A.1).



Funcţia integrală exponenţială :

$$E_i(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$E_i(-x) \equiv -\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

cu proprietăţile

$$\overline{E}_i(x) = \lim E_i(x \pm iy) \pm i\pi = l_i(e^x),$$

$$\overline{E}_i(x\,e^{\pm i\pi}) = E_i(-x) \pm i\pi,$$

x și y sînt reale iar

l_i = funcția integrală logaritmică

$$E_0(x) = e^x/_x$$

$$E_1(x) = -E_i(-x) = \int_1^\infty e^{-xu} u^{-1}\, du$$

$$E_2(x) = e^x - x E_1(x) = x[E_0(x) - E_1(x)] = \int_1^\infty e^{-xu} u^{-2}\, du$$

. . . . . .

Funcția integrală logaritmică

$$l_i(x) \equiv \int_0^x \frac{dx}{\ln x} \quad (x > 0).$$

Funcția de eroare :

$$\operatorname{erf} x = H(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} \pm \dots \right).$$

$$\operatorname{erf} x \equiv -\operatorname{erf}(-x).$$

NEW APPROXIMATIONS IN THE NEUTRON TRANSPORT THEORY

ABSTRACT

The discovery in the early decades of our century of an elementary particle fundamental for the structure of matter i. e. the neutron, led to profound consequences not only in physics and technique, but also in mathematics.

Since this allegation would seem groundless to those outside the field, it is necessary to cite in its support the deep mathematical implications related a century ago to the discovery of the molecular nature of gases, of the Brownian motion and the necessity of their mathematical formulation.

The kinetic theory of gases and similar problems in other fields have stimulated the interest of many great physicists and mathematicians, but it was Boltzmann alone who gave his name to the important equation (a non-linear integro-differential equation) which governs these physical processes. Even nowadays noteworthy works indicate that such processes still raise interesting and stimulating mathematical and physical problems.

Since in their interaction with the matter in the reactor the neutrons act as a gas, this interaction is governed by laws similar to those met with in the kinetic theory of gases and hence by a Boltzmann transport equation. The nonlinearity of this equation for gases, which does not lend itself to a rigorous solution, disappears in neutron problems, due to the smallness of their mutual interaction or to the changes imposed on the matter by this neutron interaction. The discovery of many analogies of the neutron transport processes with other transport processes known in physics, astrophysics, in the theory of chemical solutions, electron diffusion in metals, heat or light diffusion, etc., were initially particularly useful for solving the neutron transport equation. However, the inverse situation is now met with since some remarkable solutions of the neutron transport may be applied in the above domains. This means that the important theoretical and practical domain of the mathematical physics equations is enhanced by a new equation, i. e. an integro-differential linear equation with first order partial derivatives.

Together with other well-known mathematical physics equations, such as the Laplace equation (elliptic equation) met with in the theory of source free, gravitational, magnetic or electrostatic potential theory, in problems of steady temperature or incompressible fluids, the Poisson

Scanned with OKEN Scanner

or Helmholtz equation, the wave equation (hyperbolic equation), the diffusion equation (parabolic equation), the telegraphist equation or the Maxwell equation met with in many domains of physics or technique, the new equation of the neutron transport raised from the beginning numerous and cumbersome problems included in almost 2000 scientific works dedicated to this problem within the last two decades.

In many physical or mathematical approximations necessary for treating practical problems met with in the nuclear reactor physics, the neutron transport equation reduces sometimes to many of the classical equations mentioned above, which allows its solving with the aid of the well-known solutions of these equations.

The main difficulty in solving this new equation of the mathematical physics does not consist in its integro-differential character, but in its dependence on a great number of variables, which with convenient approximations may be reduced to seven, i. e. three for the neutron position, two for its direction and two for energy and time (or alternatively three for position, three for neutron velocity, including hence the energy, and one for time).

Another difficulty, which will prove to be an advantage of the transport equation is the great variety of alternate forms which it assumes in various physical and mathematical approximations.

Thus, in the general case the neutron transport equation is an integro-differential equation; in the approximations of integral kernels or of collision probability it becomes a Fredholm or Volterra integral equation : in singular eigenfunction approximations it assumes the form of a singular integral equation; it reduces to a differential equation in the diffusion approximation, in problems of reactor kinetics and in the quantum-mechanical formulation (Liouville equation); it transforms even into systems of algebraic equations in many polynomial and matrix development approximations, as well as in the numerical approximations of the discrete ordinates, angular segmentation, relaxation or finite differences methods; it becomes a functional equation in the stochastic or in the abstract approximations, while the matrix formulation of the Fokker-Planck stochastic equation of neutron transport is a Schrödinger-like equation, typical for quantum mechanics.

The main present-day problem in the neutron transport theory is hence less a development of various characteristic equations for each physical situation but rather the development of the methods of rigorous solutions or the methods of convenient approximation for each problem.

Such approximations for the solution of the neutron transport equation are physical or mathematical. There exist several physical approximations of the neutron transport processes that allow the deducing of a transport equation with "only" seven variables and the main

Scanned with OKEN Scanner

problem in their examination is the determination of the validity conditions of these approximations in various cases.

The most important physical approximations used in the neutron transport theory are :

1. The duration of neutron collisions with nuclei of matter or with other neutrons is neglected ;

2. The neutron-neutron interactions are neglected ;

3. The neutron-medium collisions do not affect the nature of the latter.

These three approximations ensure the linearity of the neutron transport equation.

4. The quantum-mechanical nature of neutrons (their spins) is neglected (this nature is of importance only in some problems of neutron diffraction and is described by four transport equations for neutron scattering amplitudes). In the reactor physics the neutron polarization effects appear as an increase of the transport cross-sections.

5. The fluctuations of neutron density are neglected (their insertion in the neutron transport equation is very difficult but in the stochastic formulation (Chapt. 8), invariant imbedding formulation (Chapt. 3) and quantum-mechanical formulation (Chapt. 6) this can be easily made.

6. The neutron motions are completely determined by their collisions, governed by classical newtonian laws. Secondary neutrons from collisions appear in the very position of the collision.

7. The spatial distribution function of the fission induced by neutrons in uranium (thorium, plutonium, etc.) is isotropic in the laboratory system and independent of neutron energy.

8. The distribution function of neutron inelastic scattering is isotropic in the laboratory system.

9. The chemical binding energy of the medium atoms, the effects of crystalline lattice and the thermal motions are neglected.

10. Neutron cross-sections are independent of neutron flux magnitudes (this means the neglecting of the reactor poisoning, of the accumulation of transuranium elements and of the fuel burn-up).

11. The neutron disintegration is neglected because the life-time (12'10) is greater than the duration of neutron processes in the reactor.

Considering these physical approximations of neutron transport processes there exist two principal ways for their examination :

a) a *macroscopic* method (Boltzmann or classical method) in which one deduces the neutron balance in a volume element following the main nuclear processes ;

b) a *microscopic* method in which each neutron is separately followed along its history consisting of various nuclear processes until its "death" by absorption or outer leakages.

In most cases the mathematical approximations of the neutron transport refer to the first method, while the second method, more diffi-

Scanned with OKEN Scanner

cult but supplying a greater amount of information, is illustrated by the stochastic (Monte-Carlo, random walk, etc.) and invariant imbedding approximations. Between these two approximations various connections and equivalences have been found since they describe the same physical process and mathematically are in the same relations as the Riemann and Lebesgue integrations, or as the Euler and Lagrange hydrodynamic equations.

The neutron transport equation is obtained in the Boltzmann approximation by calculating the neutron balance in a reactor and using all the physical approximations mentioned above ($1 \div 11$).

The main purpose of any method of mathematical approximation of the solution of this transport equation is the elimination of one or several variables in the initial equation and the solving of the simplified equation.

The elimination of the *time variable* is obtained in the simplest manner by the cancellation of terms varying in time in the transport equation and by neglecting the time dependence of the reactor quantities. This is the well-known stationary approximation. The elimination of the time dependence may be also obtained by a development of neutron distribution into exponential functions or by a transformation of the transport equation in a problem of characteristic values. However, the technique most employed for eliminating the time dependence is the Laplace transform of neutron density, the solving of the transformed equation and the return to a correct time dependence by an inverse Laplace transform.

The neutron energy is another variable enjoying the property of relatively easy elimination. A first variant is based on the assumption that all neutrons have the same energy (monoenergetic, monokinetic or monogroup approximation) or that the cross-section is constant (independent energy approximation). This is a very rough approximation since most of the nuclear parameters entering the neutron transport equation depend strongly on the neutron energy. This approximation, however, is frequently used in calculations of fast reactors and neutron spatial distributions, where this dependence is weaker. Another reason for a wide use of this monoenergetic approximation in the reactor physics is the analogy with some problems of astrophysics, with known solutions, which may be directly transposed to those problems of neutron transport that prove a real correspondence.

When the nature of the problem does not permit this approximation, we may resort to the method of artificial groups in which the elimination of the energy variable is avoided and replaced by a discretization method. This means that all neutrons are grouped in several n (equal or weighted) energy intervals, in each interval this variable being eliminated by integration. We obtain n reduced transport equations which form a system and may be easily solved.

Scanned with OKEN Scanner

A quite different treatment of the dependence on neutron energy was made by Fermi, by his neutron "age" method in which the energy interval is considered as a continuum.

However, the most elegant method for eliminating the energy variable is the method of Laplace and Fourier transforms.

The *angular variable*, which is the most cumbersome for the solving of the neutron transport equation, led to the appearance of several approximation techniques. It can be eliminated or avoided by considering only the isotropic problems (when the angular dependence of the reactor quantities disappears), or by using the integral transforms (Laplace, Fourier, Mellin, Hankel, etc.), or by a discretization of this angular variable (as in the discrete ordinates and S_n methods).

The most used method for eliminating the angular variable in the theory of neutron transport is nevertheless the polynomial development of the neutron functions which contain this variable. As in the multigroup approximation, finite systems of equations were obtained by truncating these developments, depending on the nature of the problem and the solution accuracy required.

The *spatial variable* is not usually eliminated since in most cases we are interested in the whole spatial dependence of the reactor neutron quantities. However, in order to make the calculation easier, this variable is sometimes discretized as in the finite difference method or in the relaxation method. Criteria for determining which variables are to be eliminated from the neutron transport equation, depend on the nature of the problem. For instance, in problems of reactor kinetics, the time variable cannot be eliminated, but in stationary problems it is always neglected; in neutron slowing down problems the most important variable is the neutron energy, which likewise cannot be eliminated, while in problems with strong asymmetry the angular variable should be taken into consideration.

The polynomial development into spherical harmonics of the angular dependence and the discretization of the energy variable in the multigroup approximation are considered in this book as classical, or reference approximations in the neutron transport theory. From this standpoint all their improvements and all approximation methods based on quite different principles are considered new approximations and exposed with their main characteristics.

Among these improvements one should consider the source term iteration (§ 1.1.1), the new truncating method of the developments in spherical harmonics (Legendre polynomials) (§§ 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4), the elimination of the truncating requirement by using a mixed integral transform (Mellin and Hankel) (§ 1.1.5), a new treatment of the scattering function in the transport equation by a Laplace transform (§ 1.1.7), the double development of the function near a discontinuity which permits

Scanned with OKEN Scanner

its avoiding (§ 1.1.6) and the development of neutron transport functions in spherical harmonics of even order (§ 1.1.8).

These developments present many interesting and important advantages when they are replaced by Jacobi—Gegenbauer polynomials, Tchebyscheff polynomials, Hermite polynomials, Laguerre polynomials, etc. (§§ 1.2, 1.3, 1.4).

Another great class of approximation methods in the neutron transport theory is the *approximation of the integral equation* (§ 2.1) and those related to it, such as the approximation of *singular eigenfunctions* (§ 2.2) and of the *first collision probability* (§ 2.3) or the approximations of *integral transforms* (§ 2.4) and of the *integral kernels* (§ 2.5) characterized by more rigorous solutions and a wider applicability to more complex geometries and physical situations.

Their importance is not only an intrinsic one; by their accuracy, the integral approximations permit to ensure the validity of other approximations and to solve problems in the reactor spectral theory.

The variational calculus and the perturbation theory (Chapt. 4) led to noteworthy results in this field, characterized by a good accuracy and numerous applications. Based on the deducing of variational expressions (functionals), from which characteristic equations are derived for various neutron processes in the reactor by using their stationarity properties, the variational method furnished solutions of the neutron transport equation in criticality problems, in neutron slowing-down problems, in the estimation of neutron distribution, etc.

The perturbation theory (equivalent to the variational method in some particular cases) was successfully applied to problems of reactor kinetics, to the estimation of criticality and perturbation effects on the reactor stability. Within these theories new and worthnoting concepts for the reactor physics have appeared, such as adjoint fluxes, adjoint transport equation and the neutron importance function (a weighting function).

The *quantum-mechanical aspects* of the neutron transport theory (Chapt. 5), neglected in the classical treatment, proved to be essential in problems of neutron polarization and density fluctuations where other approximations are powerless. Low energy neutron interactions and interference phenomena, significant in the neutronographical analysis of the solid state or of liquids, are typical quantum-mechanical effects and their approach is obviously made in this quantum-mechanical treatment of the neutron transport. The generality of the neutron transport processes also led to unusual manners of approach, new in principle, such as :

— *invariant imbedding approximation* (Chapt. 3), based on the use of some general physical invariance principles in the treatment of neutron processes. Their imbedding in a wider class of processes leads to nonlinear integro-differential equations with initial conditions (as distinguished

from Boltzmann's classical equation with boundary conditions which are more difficult);

— *the thermodynamic approximation* (Chapt. 5) led also to a remarkable equivalence between the neutron transport theory and the thermodynamic theory, using only variational principles, typical for thermodynamics, such as minimum entropy rate and maximum persistence and characteristic thermodynamic concepts such as neutron or moderator entropy, neutron "gas" temperature, etc.;

— *the abstract approach* (Chapt. 7) of the neutron transport in which the classical neutron functions are represented by general evolution operators in Banach spaces or by the mathematical spectral theory of positive functions;

— *the stochastic approximation* (Chapt. 8) characterized by a separate analysis of the "history" of each neutron, led to powerful techniques such as the method of random walk, renewal and branching theories and the method of probability generating functions. All these new standpoints and formulations of the neutron transport theory furnished not only remarkable solutions, but also new and unexpected standpoints for the discovery of unknown aspects, as well as the possibility of emphasizing the deep relations with other domains of the mathematical physics.

Thus, there have been put into evidence relations (and sometimes equivalences) between the neutron transport theory and the thermodynamics of reversible processes, the spectral theory of linear operators, the stochastic processes, the theory of characteristic functions (from the theory of integral and differential equations) by means of the probability generating functions (from the stochastic theory). The same stochastic formulation led — by the well-known relations between the theory of Markov processes and the theory of dynamic programming — to the use of the latter in optimization problems of the neutron transport, while the equivalence of the Fokker—Planck matricized equation (the stochastic analogue of the neutron transport equation) with the Schrödinger quantum-mechanical equation permitted the study of neutron density fluctuations.

Another noteworthy connection of the neutron transport theory and the dynamic programming was established with the discovery of the fact that the use of invariance principles in the neutron transport, in the invariant imbedding approach represents a "decision-free" variant of the dynamic programming. The same invariance principles, related in a natural manner to the causality principles (Hadamard), indicated close relations with the semi-group theory and a matrix formulation of the transport equation suggested connections with the theory of the generalized potential (Chapt. 3). Other connections were established with the semi-group theory through the Chapman—Kolmogorov equations obtained in the stochastic treatment of the neutron transport.

Scanned with OKEN Scanner

These new approximations may be considered hence as substantial contributions brought in the last decades to various branches of mathematics and mathematical physics to the fruitful theoretical and practical domain of the theory of neutron transport, in spite of the increasing gap between pure and applied mathematics. Fortunately this gap, resulting from the abstract character of modern mathematics, is related to the appearance of a new bridge with the applied mathematics, represented by powerful mathematical methods of solution, approach and approximation.

We hope that this informative book represents such a bridge confirming E. P. Wigner's words "the purpose of my remarks was to convey not only the impression that the science of reactors could be much helped by the attention of mathematicians interested in its problems but also that mathematicians can find many interesting and challenging problems in reactor science. Of the two broad fields which were mentioned, the theory of the reactor equations, and the method of their solutions, I consider the first one even more interesting and even more important than the second one".

The book tries to present the perspectives of the theory of neutron transport and its relation with theoretical and practical problems of the physics and technics of nuclear reactors. Its manner of presentation implies the knowledge of the classical theory of neutron transport as well as elements from the approximation methods given in previous works.

Scanned with OKEN Scanner

Contents

	Page
Introduction	11
Bibliography	26
CHAPTER 1. **Polynomial approximations**	29
1.1. Spherical harmonics (P_n)	29
1.1.1. Iterated (P_n^*) approximation	31
1.1.2. B_n approximation	32
1.1.3. G_n (P_n generalized) approximation	33
1.1.4. Asymptotic (A_n) approximation	40
1.1.5. P_∞ approximation	42
1.1.6. Double P_n approximation (Yvon)	47
1.1.7. Uncorrelated approximation	53
1.1.8. Even spherical harmonics approximation	55
1.2. Jacobi—Gegenbauer polynomials	59
1.3. Tchebyscheff polynomials	68
1.4. Other polynomial approximations (Hermite, Laguerre, Maxwell, etc.)	73
Bibliography	75
CHAPTER 2. **Integral approximations**	77
2.1. Integral equation approximation	80
2.2. Singular eigenfunctions approximation	93
2.3. First collision probability approximation	105
2.4. Integral transform approximation	112
2.5. Integral kernel approximation	144
Bibliography	192
CHAPTER 3. **Invariant imbedding approximation**	195
Bibliography	203
CHAPTER 4. **Variational calculus method and perturbation theory**	205
Bibliography	227
CHAPTER 5. **Thermodynamical formulation of neutron transport**	229
5.1. Neutron transport theory and thermodynamic theory equivalence	231
5.2. The principle of maximum persistence	239
5.3. Spatial-energetic distribution of neutrons	246
Bibliography	258

Scanned with OKEN Scanner

Page

CHAPTER 6. **Quantum-mechanical approximation** 259
Bibliography 262

CHAPTER 7. **Abstract approach of neutron transport** 263
7.1. Kato—Reed method 266
7.2. Habetler—Martino method 271
Bibliography 275

CHAPTER 8. **Stochastic approximations** 277
8.1. Random walk 279
8.2. Method of the probability generating functions 290
Bibliography 292

CHAPTER 9. **Numerical approximations** 293
9.1. Discrete ordinate method 293
9.2. Angular segmentation (S_n) method 295
(S_n-Diffusion, S_n-Analytical, Double S_n) 295
9.3. Synthetic method 299
9.4. Monte-Carlo method 305
Bibliography 311

APPENDIX 313
ABSTRACT 315

ROMANIA • FUNDAȚIA „GH. ASACHI” • IAȘI

Redactor responsabil: PETRU ȘTEFĂNESCU-SOARE
Tehnoredactor: ELENA PREDA

Dat la cules 29.12.1967. Bun de tipar 22.06.1968. Apărut 1968. Tiraj 1 220 ex. legale. Hîrtie offset A. de 80 g/m². 700 × 1000/16. Coli editoriale 21,28. Coli de tipar 20,25. A. 21 739/1967. C. Z. pentru biblioteci mari 539.125.52:517.392. C. Z. pentru biblioteci mici 539.1 : 517.

Întrepr. Poligrafică „Informația” str. Brezoianu nr. 23–25 București, Republica Socialistă România, comanda nr. 48.

Scanned with OKEN Scanner